De Miguel • Lerra • De la Rosa

Razonamiento MATEMÁTICO

HORIZONTES DE BÚSQUEDA

Enfoque por competencias genéricas y disciplinares

LIMUSA

Razonamiento matemático



Razonamiento matemático. Horizonte de búsqueda.

Matemáticas

De Miguel, Lerra, De la Rosa

LIMUSA



Lezama, Mario Alberto
Razonamiento matemático. Horizontes de búsqueda. Matemáticas / Mario Alberto Lezama Rojas, Emilio Miguel Soto García, Vivaldo Cuesta Sánchez. -- México : Limusa, 2012
110 p.: il. 27 x 20.5 cm.
ISBN: 978-607-05-0388-7
Rústica

1 Geometría -- Estudio y enseñanza (Bachillerato) 2. Trigonometría -- Estudio y enseñanza (Bachillerato) 3. Matemáticas -- Estudio y enseñanza (Bachillerato)
I. Soto, Emilio Miguel, coaut. II. Cuesta, Vivaldo, coaut.

Dewey: 516 I 22 / V172m LC: QA529

OBRA PUBLICADA POR FUSIÓN EDUCATIVA, S. A. DE C. V. BAJO LA LICENCIA DE EDITORIAL LIMUSA, S. A. DE C. V.

BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C. P. 06040
(55) 51 30 07 00
01 (800) 706 91 00
(55) 55 12 29 03
limusa@noriegaeditores.com
www.noriega.com.mx

CANIEM Núm. 121

PRIMERA EDICIÓN

HECHO EN MÉXICO

ISBN: 978-607-05-0388-7



IMPRESO EN MÉXICO

Contenido

Unidad 1
Heurística

1.1. Estrategias para la solución de problemas 18
- 1.1.1. Manejo de tablas y búsqueda de un patrón 18
- 1.1.2. Uso de simetrías 20
- 1.1.3. Modificar el problema 20
- 1.1.4. Elección de una notación efectiva 22
- 1.1.5. Trazo de figura 22
- 1.1.6. División por casos 25
- 1.1.7. Argumentación por contradicción, coloración y paridad 28
- 1.1.8. Generalización 29

Unidad 2
Solución creativa de problemas aritméticos y algebraicos

2.1. Solución creativa de problemas geométricos y algebraicos 48
- 2.1.1. Problemas aritméticos 48
- 2.1.2. Problemas algebraicos 54

Unidad 3
Solución creativa de problemas geométricos

3.1. Solución creativa de problemas geométricos 72

Un vistazo y manos a la obra

Este libro está diseñado íntegramente con un enfoque por competencias y hemos puesto especial interés en que fácilmente identifiques éstas a lo largo del texto. Para reconocerlas encontrarás las siguientes siglas:

Cg Para las competencias genéricas.

Cdb Para las competencias disciplinares básicas.

Cada sigla va acompañada de un número que indica qué competencia estarás desarrollando en ese momento.

Para las **Cg** (competencias genéricas), tenemos:

Se autodetermina y cuida de sí	**1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.**	Atributos	A. Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
			B. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
			C. Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.
			D. Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
			E. Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.
			F. Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.
	2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	Atributos	A. Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
			B. Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.
			C. Participa en prácticas relacionadas con el arte.
	3. Elige y practica estilos de vida saludables.	Atributos	A. Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.
			B. Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.
			C. Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

Se expresa y comunica	**4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.**	Atributos	A. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
			B. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
			C. Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
			D. Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
			E. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
Piensa crítica y reflexivamente	**5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.**	Atributos	A. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
			B. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
			C. Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
			D. Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
			E. Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
			F. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
	6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	Atributos	A. Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
			B. Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
			C. Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
			D. Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
Aprende de forma autónoma	**7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.**	Atributos	A. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
			B. Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
			C. Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Trabaja en forma colaborativa	**8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.**	Atributos	A. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
			B. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
			C. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.
Participa con responsabilidad en la sociedad	**9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.**	Atributos	A. Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.
			B. Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.
			C. Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.
			D. Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.
			E. Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.
			F. Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.
	10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	Atributos	A. Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación.
			B. Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.
			C. Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.
	11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.	Atributos	A. Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
			B. Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.
			C. Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.

En este libro referimos las **Cdb** de Comunicación:

1.	Identifica, ordena e interpreta las ideas, datos y conceptos explícitos e implícitos en un texto, considerando el contexto en el que se generó y en el que se recibe.
2.	Evalúa un texto mediante la comparación de un contenido con el de otros, en función de sus conocimientos previos y nuevos.
3.	Plantea supuestos sobre los fenómenos naturales y culturales de su entorno con base en la consulta de diversas fuentes.
4.	Produce textos con base en el uso normativo de la lengua, considerando la intención y situación comunicativa.
5.	Expresa ideas y conceptos en composiciones coherentes y creativas, con introducciones, desarrollo y conclusiones claras.
6.	Argumenta un punto de vista en público de manera precisa, coherente y creativa.
7.	Valora y describe el papel del arte, la literatura y los medios de comunicación en la recreación o la transformación de una cultura, teniendo en cuenta los propósitos comunicativos de distintos géneros.
8.	Analiza y compara el origen, desarrollo y diversidad de los sistemas y medios de comunicación.

Acerca de este libro

A lo largo de esta obra, encontrarás diversas actividades con la siguiente iconografía:

Atender   Entender

Juzgar   Valorar

Al encontrar una actividad con el icono debes recordar que el aprendizaje inicia a partir de tus sentimientos y experiencias previas.

El icono implica que es importante que conformes tus propios conceptos y los relaciones con tu aprendizaje.

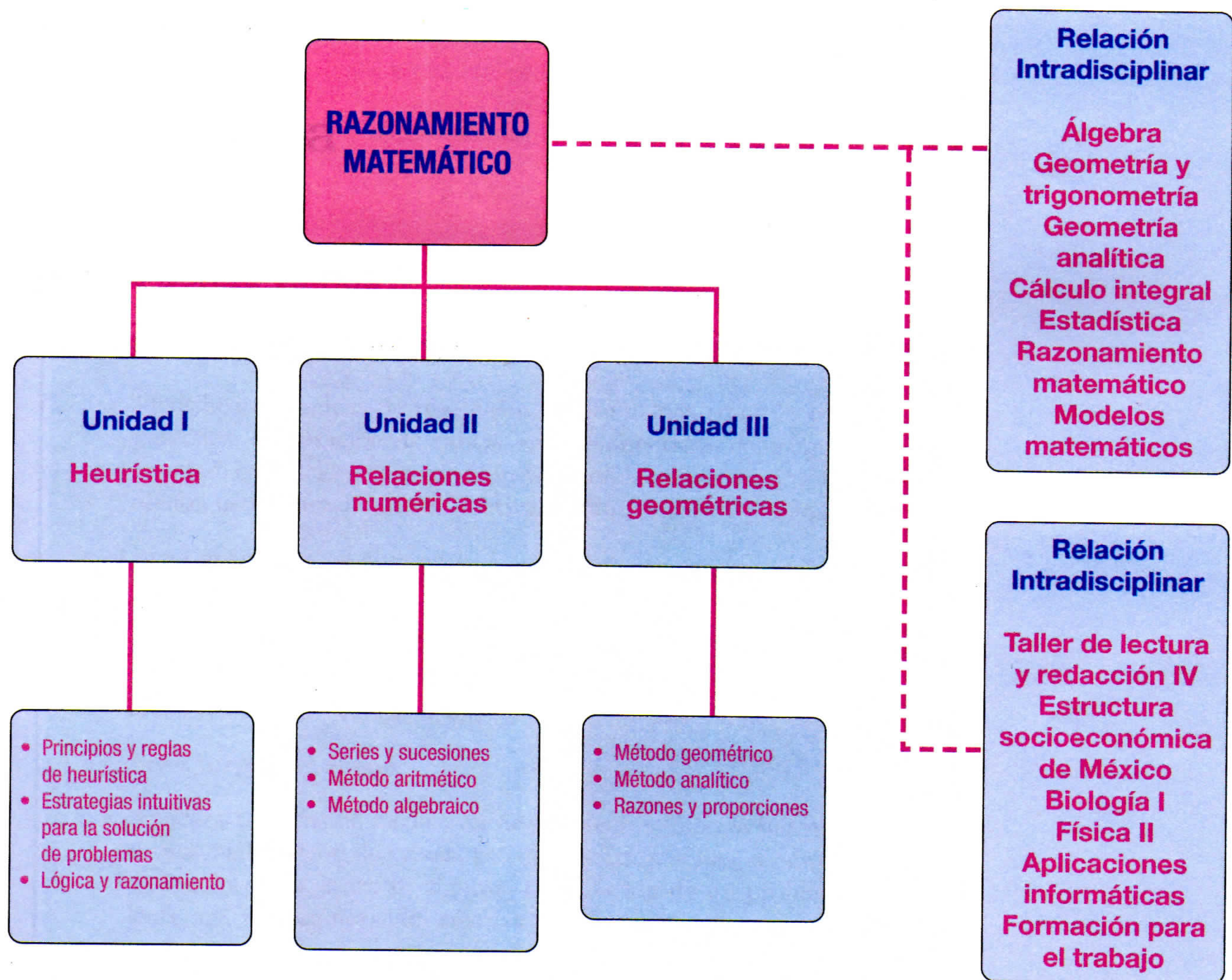
La actividad con el icono significa que ha llegado el momento de poner a prueba tus aprendizajes, de comprobación y aplicación.

Al visualizar el icono te invita a que decidas qué hacer y cómo utilizar lo que has aprendido, en tu vida diaria.

Recuerda que el aprendizaje está presente en todas partes, sólo es cuestión de que te decidas a descubrirlo, por ello te invitamos a aprovechar al máximo este libro y alcanzar los objetivos educativos establecidos a favor de tu desarrollo personal y académico.

Te damos la más cordial bienvenida a esta aventura.

Esquema general de la asignatura



Unidad 1

Heurística

¿Hacia dónde vamos?

En el nivel **atender**, el alumno:

- Identificará técnicas de resolución de problemas como la búsqueda de patrones, elaboración de tablas, uso de simetrías, solución por casos, paridad, coloración, trazo de figuras, formulación de un problema equivalente, uso de una notación efectiva y argumentación por contradicción.

En el nivel **entender**, el alumno:

- Entenderá técnicas de resolución de problemas como la búsqueda de patrones, elaboración de tablas, uso de simetrías, solución por casos, paridad, coloración, trazo de figuras, formulación de un problema equivalente, uso de una notación efectiva y argumentación por contradicción.

En el nivel **juzgar**, el alumno:

- Aplicará técnicas de resolución de problemas como la búsqueda de patrones, elaboración de tablas, uso de simetrías, solución por casos, paridad, coloración, trazo de figuras, formulación de un problema equivalente, uso de una notación efectiva y argumentación por contradicción.
- Reflexionará al elegir la estrategia correcta en la solución de un problema.

En el nivel **valorar**, el alumno:

- Reconocerá la importancia de aplicar estrategias en la resolución de un problema.
- Solucionará problemas a partir de estrategias que permitan el desarrollo del razonamiento matemático.



¿Cómo iniciamos?

Evaluación diagnóstica
Nombre: ____________________

Grupo:____________ Turno: ____________ Fecha: ____________

Resuelve los siguientes ejercicios y entrega a tu profesor.
Aciertos:__________

1. ¿Cuál de los siguientes es un número impar?

(a) $1^4 + 1$ (b) $5^4 + 3$ (c) $11^4 + 7$
(d) $3^4 + 2$ (e) $7^4 + 5$

2. ¿Cuál es el valor de $7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7$?

(a) 7^{49} (b) 49^{49} (c) 7^{7^7}
(d) 49^7 (e) 7^8

3. Las casas en una calle están igualmente espaciadas para que cada una de ellas esté directamente opuesta a otra. Las casas de un lado de la calle son numeradas con $1, 2, 3, 4\ldots$ sucesivamente, mientras que en el lado opuesto continúan numerándose en orden contrario. Si la casa 38 es opuesta a la 63, ¿cuántas casas hay en la calle?

(a) 98 (b) 102 (c) 106
(d) 100 (e) 104

4. El promedio de x y $7x$ es 16. ¿Cuál es el valor de $3x$?

(a) 10 (b) 12 (c) 14
(d) 11 (e) 13

5. ¿Cuál es la suma de los inversos multiplicativos de los números $1, 3, 6, 10, 15$ y 21?

(a) 10 (b) 56 (c) $\frac{49}{21}$
(d) $\frac{12}{7}$ (e) $\frac{3}{2}$

6. Obtén el valor de a^2+b^2, si (a, b) es la solución del sistema $\begin{cases} 3x+2y=21 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

(a) 8 (b) 34 (c) 13
(d) 22 (e) 5

7. Admite que Ↄ(x) significa *ser madre de* x y que Ↄ(Ↄ(x)) es abreviado simplemente como Ↄ$^2(x)$. A partir de lo anterior, ¿cuál es la relación de *Fernanda* a *Lupita* si se considera lo siguiente?

Ↄ^2(*Fernanda*) = Ↄ(*Lupita*)

Ↄ(*Fernanda*) $\neq$ *Lupita*

(a) Sobrina (b) Hija (c) Prima
(d) Tía (e) Madre

8. ¿Cuál es el término que falta en la igualdad $(2a^2r^4+1)^2 = 4a^4r^8+1$?

(a) $2a^2r^4$ (b) $4a^2r^4$ (c) $4a^2r^8$
(d) $4a^4r^4$ (e) $2a^4r^8$

9. Si a es un número positivo y b es negativo, ¿cuál de las siguientes expresiones es negativa?

(a) $-(ab)$ (b) $(-a)b$ (c) $a(-b)$
(d) $a-b$ (e) ab

10. Si divides el polinomio x^3-2 entre el polinomio x^2-2, ¿cuál es el residuo que obtienes?

(a) 2 (b) $-2x-2$ (c) $2x-2$
(d) -2 (e) $2x+2$

1.1. Estrategias para la solución de problemas

Niveles de Operación de la Actividad Consciente Intencional

Para la inteligencia	Para la reflexión	Para la deliberación
¿Qué es una estrategia para la resolución de un problema?	*¿Cuáles son las estrategias empleadas en la resolución de problemas?*	*¿Para qué sirve distinguir las diferentes estrategias en la resolución de un problema?*

Heurística procede del término griego εψρσκειν, que significa encontrar, hallar, descubrir, inventar... Heurística: es la estrategia sistémica para realizar de forma inmediata innovaciones positivas. La facultad heurística es un rasgo característico de los visionarios, se define como el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención, amén de como resolver problemas a través del pensamiento lateral o pensamiento divergente, los cuales constituyen a la creatividad.

Las matemáticas, al igual que otras ciencias, son un intento del hombre por comprender y explicar el universo y las cosas que en él ocurren. Su aprendizaje, por lo tanto, no debe consistir en la adquisición de conocimientos y herramientas, sino fomentar la creatividad, curiosidad y actitud que la hicieron posible y la mantienen viva.

Enfrentarnos a numerosas y variadas experiencias con la solución de problemas es una manera de fomentar la curiosidad y creatividad. En esta unidad, estudiaremos lo concerniente a las estrategias para resolver problemas.

La estrategia o la táctica para resolver problemas es llamada heurística. Aquellos que han trabajado sobre ésta han descrito un número de ideas básicas que son típicamente usuales. Entre las estrategias más usadas, podemos destacar las siguientes:

1. Manejo de tablas.
2. Búsqueda de un patrón.
3. Uso de simetría.
4. Modificar el problema.
5. Trazo de figura.
6. División por casos.
7. Elección de una notación efectiva.
8. Argumentación por contradicción.
9. Coloración.
10. Paridad.
11. Generalización.

1.1.1. Manejo de tablas y búsqueda de un patrón

Actividad 1.1.

CD1 CD2 CD3 CD4 CD8

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

«Más vale creatividad e imaginación que conocimiento» **Albert Einstein**.

Resuelve los siguientes problemas en equipo y expón tus soluciones ante el grupo.

Ejemplo 1.1. *Los esquemas mostrados en la figura 1.1, constan de* $1, 5, 13$ *y* 25 *cuadrados unitarios que no se traslapan o superponen. Si se continúa con este patrón, ¿cuántos cuadrados unitarios habrá para el esquema* 2008*?*

Esquema 0 Esquema 1 Esquema 2 Esquema 3

Figura 1.1: Ejemplo 1.1.

Solución

Dibujamos las esquemas 4, 5 y 6 para contar los cuadrados unitarios que forman a cada una de ellas. Observa la figura 1.2:

Esquema 4 Esquema 5 Esquema 6

Figura 1.2: Ejemplo 1.1.

¡eureka, eureka!. *Arquímedes.* **Yo no busco yo encuentro.** *Pablo Picasso.*

Reunimos la información obtenida de las figuras 1.1 y 1.2 en la tabla 1.1, y tenemos:

No. de figura	Total de cuadros unitarios
0	1
1	5
2	13
3	25
4	41
5	61
6	85

Tabla 1.1:

Observa que la tabla anterior se puede escribir de la siguiente manera. Ver tabla 1.2:

No. de esquema.	Total de cuadros unitarios.
0	1
1	$1 + (4 \times 1) = 5$
2	$1 + (4 \times 1) + (4 \times 2) = 13$
3	$1 + (4 \times 1) + (4 \times 2) + (4 \times 3) = 25$
4	$1 + (4 \times 1) + (4 \times 2) + (4 \times 3) + (4 \times 4) = 41$
5	$1 + (4 \times 1) + (4 \times 2) + (4 \times 3) + (4 \times 4) + (4 \times 5) = 61$
⋮	⋮
2008	$1 + (4 \times 1) + (4 \times 2) + \cdots + (4 \times 2008) = 8068145$

Tabla 1.2:

Concluimos a partir de la información de esta tabla que el número de cuadros en el esquema 2008 es $8,068,145$.

1.1.2. Uso de simetrías

Otra manera de resolver el problema es usar la simetría de la figura, para ello, dibujamos la serie de figuras de la siguiente manera. Ver figura 1.3.

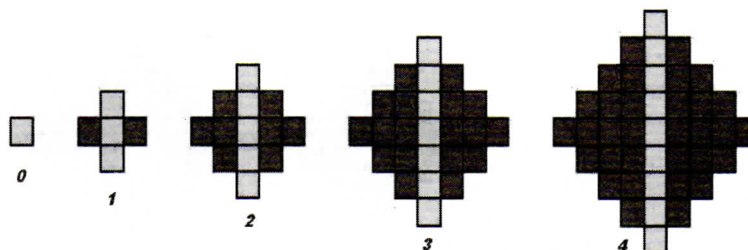


Figura 1.3: Problema 1.1.

Al observar la simetría de cada figura, podemos contar los cuadros en negro y establecer que: ***El largo de la figura* 0 *es de* 1 *cuadro, de la figura* 1 *son* 3 *cuadros, de la figura* 2 *son* 5 *cuadros, etc.***

A partir de ello podemos establecer, por ejemplo, que el largo de la figura 6 es $2(6)+1 = 13$ y, por lo tanto, el de la figura 2008 está formado por $2(2008)+1 = 4017$ cuadros unitarios. Si usamos lo anterior, podemos establecer en tabla 1.3.

Concluimos a partir de la información de esta tabla, que el número de cuadros en la figura 2008 es 8068145.

1.1.3. Modificar el problema

Otra manera de resolver el problema, es modificarlo de la siguiente manera. Dibujamos una serie de cuadrados, los cuales se muestran en la figura 1.4.
Al observar las figuras podemos deducir que:

No. de figura	Total de cuadros unitarios
0	1
1	$+3+1=5$
2	$1+3+5+3+1=13$
3	$1+3+5+7+5+3+1=25$
4	$1+3+5+7+9+7+5+3+1=41$
5	$1+3+5+7+9+11+9+7+5+3+1=61$
$\vdots$	$\vdots$
2008	$1+3+\cdots+4017+\cdots+3+1=8068145$

Tabla 1.3:

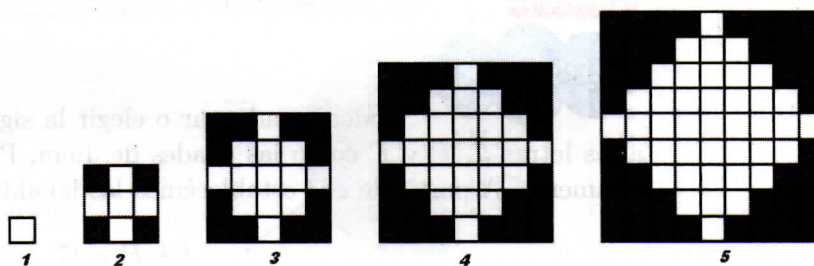


Figura 1.4: Problema 1.1.

El cuadrado 0 está formada por $1\times 1 = 1^2$ cuadros; el cuadrado 1, modificada, está formada por $3\times 3 = 3^2$ cuadros. Para contar el total de cuadros de la figura original, restamos los cuadros negros que son 1 en cada esquina, es decir, el cuadrado 1 original está constituida por $3^2-4(1)$. El cuadrado 2, modificada, tiene $5\times 5 = 5^2$ cuadros. Para contar el total de cuadros del cuadrado original, restamos los cuadros negros que son $1+2$ en cada esquina, es decir, el cuadrado 2 original está formada por $5^2-4(1+2)$. Como la manera de contar los cuadros en cada cuadrado sigue el mismo patrón, entonces podemos establecer la tabla 1.

No. Figura	Total de cuadros unitarios
0	$1^2-4(0)=1$
1	$3^2-4(1)=5$
2	$5^2-4(1+2)=13$
3	$7^2-4(1+2+3)=25$
4	$9^2-4(1+2+3+4)=41$
5	$11^2-4(1+2+3+4+5)=61$
$\vdots$	$\vdots$
2008	$4017^2-4(1+2+\cdots+2008)=8068145$
n	$(2n+1)^2-4(1+2+\cdots+n)=(2n+1)^2-2n(n+1)$

Tabla 1.4:

A partir de los datos mostrados en la tabla, concluimos que el número de cuadros en la figura 2008 es 8068145.

1.1.4. Elección de una notación efectiva

Uno de los primeros pasos al trabajar un problema de matemáticas, es traducirlo a términos simbólicos. Todos los conceptos claves deberán ser identificados, etiquetados y las redundancias en la notación pueden ser eliminadas al ir descubriendo las relaciones claves.

La notación usada para simplificar un problema puede realizarse aprovechando toda la gama de posibilidades que nos proporciona el álgebra.

Ejemplo 1.2. *Los niños Juan, Pancracio y Floripondio suman sus edades por pares y obtienen 17, 19 y 14 años. Obtén la suma de las edades de todos los niños.*

Solución

Podemos adoptar o elegir la siguiente notación: Consideremos a las letras J, P y F como las edades de Juan, Pancracio y Floripondio respectivamente. A partir de ello establecemos las igualdades:

$$J + P = 17$$

$$J + F = 19$$

$$F + P = 14$$

Sumando todas las ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{r} J + P = 17 \\ J + F = 19 \\ F + P = 14 \\ \hline \end{array}$$

$$2J + 2P + 2F = 17 + 19 + 14 = 50$$

Si $2J + 2P + 2F = 50$, entonces: $J + P + F = 25$. Por lo tanto, la suma de las edades de todos los niños es 25.

1.1.5. Trazo de figura

Ejemplo 1.3. *¿Cuál es el mayor número de regiones que se pueden formar en un círculo al trazar sobre él 1000 líneas rectas?*

Solución

La estrategia para resolver el problema es dibujar el círculo y trazar las líneas rectas.

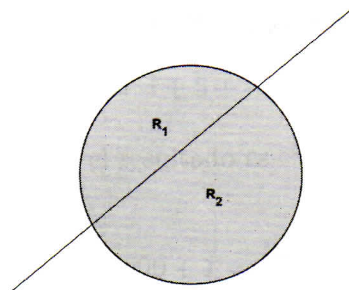


Figura 1.5: 2 es el número máximo de regiones.

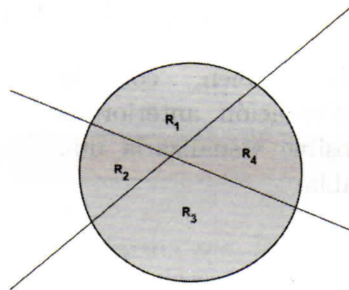


Figura 1.6: 4 es el número máximo de regiones.

Si trazamos 1 línea recta se puede ver que sólo es posible formar 2 regiones como máximo. Observa la figura 1.5:
Al trazar 2 líneas rectas se puede ver que sólo es posible formar 4 regiones como máximo. Ve la figura 1.6:

Al trazar 3 líneas rectas se puede ver, que sólo es posible formar 7 regiones como máximo. Observa la figura 1.7:

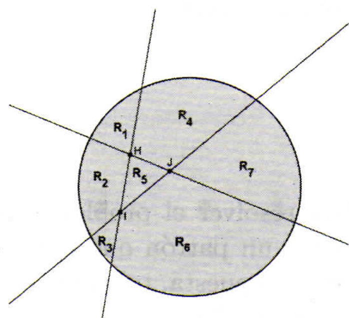


Figura 1.7: 7 es el número máximo de regiones.

Si vemos la figura 1.7, podemos deducir que al trazar la cuarta línea, ésta no debe pasar por los puntos de intersección de las anteriores, es decir, la nueva recta no debe cruzar por los puntos H, I o J.

Entonces, trazando 4 rectas en el círculo, sólo es posible formar 11 regiones como

máximo. Ve la figura 1.8:

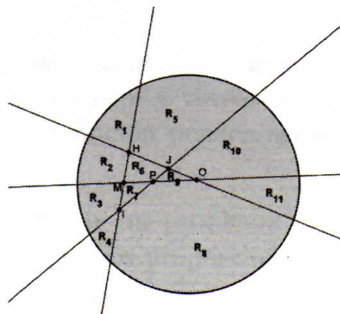


Figura 1.8: 11 es el número máximo de regiones.

Ahora bien, con la información anterior es posible visualizarla una tabla:

Número de líneas trazadas	Máximo de regiones formadas
1	2
2	4
3	7
4	11

Si el número de líneas lo denotamos con x y al número máximo de regiones con y, nuestra tabla se puede escribir así:

x	y
1	2
2	4
3	7
4	11

Recordemos que es necesario precisar el número de regiones que se forman al trazar 1000 rectas, entonces debemos encontrar el valor de y para $x = 1000$. Observa la siguiente tabla:

x	y
1	2
2	4
3	7
4	11
$\vdots$	$\vdots$
1000	?

Para resolver el problema, podemos buscar un patrón que permita obtener la respuesta, tal como se muestra a continuación:

x	y
1	$2 = 1 + 1$
2	$4 = 1 + 2 + 1$
3	$7 = 1 + 2 + 3 + 1$
4	$11 = 1 + 2 + 3 + 4 + 1$
$\vdots$	$\vdots$
1000	?

Al observar la tabla, se infiere que para 1000 rectas el número de regiones se obtiene calculando esta suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 1000 + \mathbf{1}$$

Es decir, para $x = 1000$ se obtiene el siguiente valor de y:

$$y = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 1000 + \mathbf{1}$$

Si empleamos la suma de Gauss, el resultado es:

$$y = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 1000 + \mathbf{1} = \frac{1000(1000+1)}{2} + \mathbf{1} = 500501$$

$$y = 500501$$

Por lo tanto, el número máximo de regiones que se forman al trazar 1000 rectas es 500501.

1.1.6. División por casos

Sucede con frecuencia que un problema sea dividido en un número pequeño de subproblemas, cada uno de los cuales, manejado por separado a la manera de caso por caso.

En las primeras etapas, es útil pensar cómo subdividir un problema en un número pequeño de subproblemas. La heurística se da con frecuencia de la siguiente manera: «*Si no puede resolverse el problema, encuentre uno más que se relacione, que sea más sencillo y resuélvelo*».

Ejemplo 1.4. *Con vértices en los puntos de la figura 1.9, ¿cuántos triángulos se pueden dibujar?*

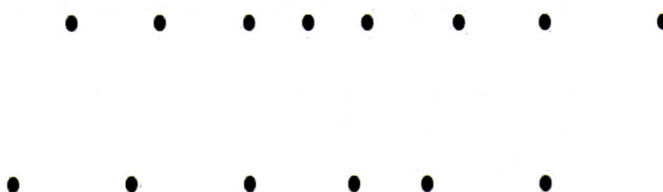


Figura 1.9: Ejemplo 1.4.

Solución

Podemos dividir el problema en dos casos.

Caso 1 Contamos los triángulos con pico hacia arriba. Ver figura 1.10:

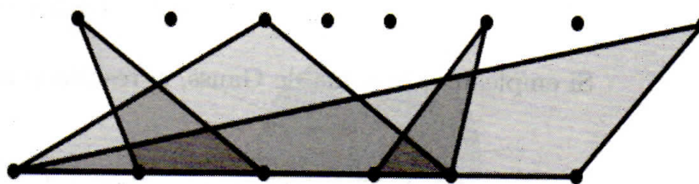


Figura 1.10: Triángulos con pico hacia arriba.

Para solucionar el problema, es factible asignar a cada uno de los 8 puntos opuestos a las bases de cada triángulo con las letras A, B, C, D, E, F, G y H.

A los puntos que forman las bases de estos triángulos se les puede asignar los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, como a continuación se ejemplifica:

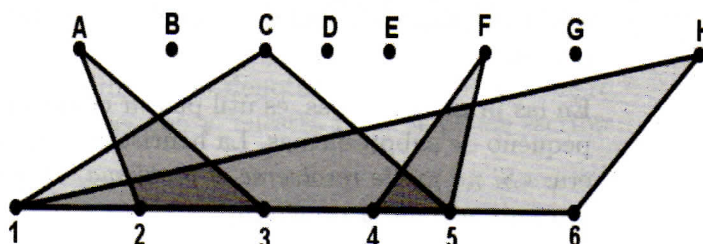


Figura 1.11: Usamos una notación para cada punto.

Para contar los triángulos, observemos que cada uno de ellos se forma con un par de números y una letra. Por ejemplo, en la figura 1.12 se distingue el triángulo $1 \to 6 \to H$.

Entonces, terminamos este primer caso contando todos los tríos de la forma *número* $\to$ *número* $\to$ *letra*, donde los números posibles son del 1 al 6 y las letras disponibles son A, B, C, D, E, F, G y H.

Si usamos el principio de la multiplicación, se establece que:

$$\underbrace{6}_{\text{posibilidades para el primer número}} \times \underbrace{5}_{\text{posibilidades para el segundo número}} \times \underbrace{8}_{\text{las posibles letras}} = 240$$

Por lo tanto, 240 es el número total de triángulos con pico hacia arriba.

Caso 2 Contamos los triángulos con pico hacia abajo, como se muestra en la figura 1.13:

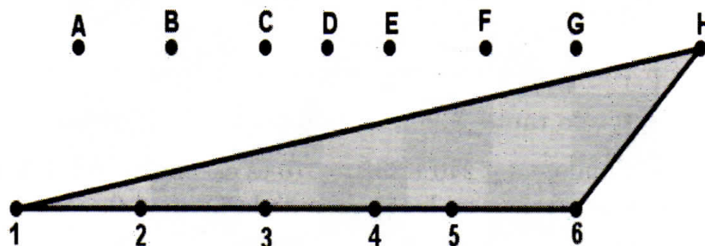


Figura 1.12: Triángulo $1 \to 6 \to H$.

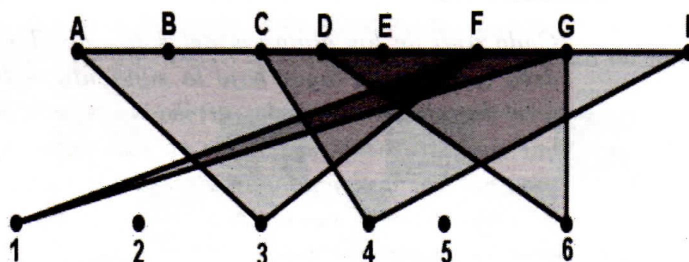


Figura 1.13: Triángulos con pico hacia abajo.

Para contar los triángulos, observa que cada uno de ellos se forma con un par de letras y un número. Por ejemplo, en la figura 1.14 se aprecia el triángulo $F \to G \to 1$.

Entonces, terminamos el segundo caso contando todos los tríos de la forma *letra* $\to$ *letra* $\to$ *número*, donde las letras disponibles son A, B, C, D, E, F, G y H y los números posibles son del 1 al 6.

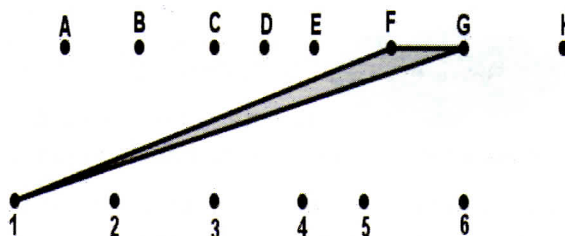


Figura 1.14: Triángulo $F \to G \to 1$.

Si usamos el principio de la multiplicación, se establece que:

$$\underbrace{8}_{\text{posibilidades para la primera letra}} \times \underbrace{7}_{\text{posibilidades para la segunda letra}} \times \underbrace{6}_{\text{los posibles números}} = 336$$

Por lo tanto, 336 es el número total de triángulos con pico hacia abajo.

Finalmente, $240+336 = 576$ es el número total de triángulos que pueden dibujarse con vértices en los puntos de la figura 1.9.

1.1.7. Argumentación por contradicción, coloración y paridad

Ejemplo 1.5. *En un colegio la maestra de un cierto grupo de alumnos quiere realizar la siguiente dinámica:*

Cada uno de los alumnos del salón de clases, mostrado en la figura 1.15, debe cambiar de lugar bajo la siguiente regla: puede moverse solo un lugar a la derecha o izquierda, arriba o abajo, cuando sea posible; de tal manera que ningún estudiante quede en su mismo lugar al realizar todos ellos un solo movimiento y sin cambiar de sitio las sillas. Indira, que tomó el tallercito de competencias matemáticas, afirma que esto no es posible. ¿Es cierta la afirmación de Indira?



Figura 1.15: Salón de clases del grupo de Indira.

Solución

Intenta varios acomodos y conjetura que no es posible que en un solo movimiento los estudiantes logren cambiarse de lugar.

Para probar la validez de la afirmación expuesta por Indira, vamos a considerar la siguiente argumentación por contradicción:

Supongamos que sí es posible formar tal arreglo, es decir, ***que en un solo movimiento los estudiantes logran cambiarse de lugar***.

Podemos entonces colorear la cuadrícula, como se aprecia en la figura 1.16, donde cada estudiante está en un lugar, ya sea blanco o negro.

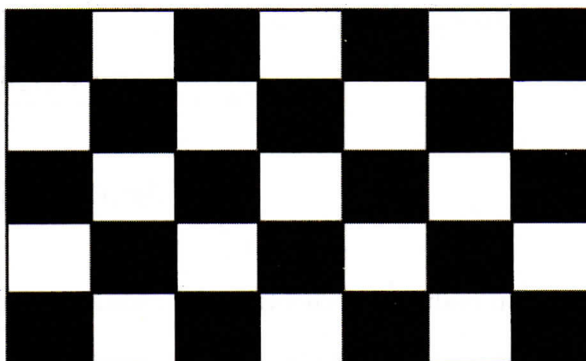


Figura 1.16: Coloreamos la cuadrícula formada por el salón de clases.

Observa que cualquier estudiante, esté situado en una casilla blanca o negra, puede realizar cualquiera de los cuatro movimientos que se ilustran en la figura 1.17:

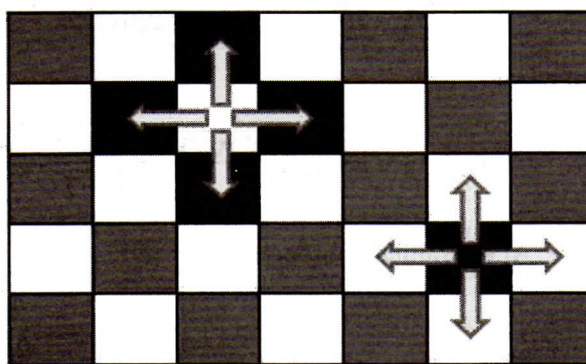


Figura 1.17: Posibles movimientos de un estudiante.

Al moverse un alumno siempre queda en una casilla de diferente color respecto a su posición original, por lo tanto, se necesita la misma paridad de casillas negras y blancas, es decir, 18 casillas negras y 18 blancas.

Al contar las casillas en la figura 1.17, encontramos que son 17 casillas blancas y 18 negras, por lo tanto, es imposible hacer el movimiento de los alumnos, hecho que contradice la suposición inicial. Finalmente, la afirmación de Indira es cierta.

1.1.8. Generalización

En ocasiones, la solución de un problema se puede generalizar y, por lo tanto, utilizar posteriormente el resultado de la generalización.

Ejemplo 1.6. *Sea la ecuación:* $67x^2 + 2010x + 201 = 0$ *¿Cuál es la suma de sus raíces?*

Solución

Si r_1 y r_2 son las dos raíces de la ecuación $67x^2+2010x+201 = 0$,

entonces, deduce que:

$$r_1 = \frac{-2010 + \sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)}$$

$$r_2 = \frac{-2010 - \sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)}$$

Sin realizar las cuentitas del radical podemos efectuar la suma de r_1 y r_2:

$$r_1 + r_2 = \frac{-2010 + \sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)} + \frac{-2010 - \sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)}$$

$$r_1 + r_2 = \left(-\frac{2010}{2(67)} + \frac{\sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)}\right) + \left(-\frac{2010}{2(67)} - \frac{\sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)}\right)$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{2010}{2(67)} + \frac{\sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)} - \frac{2010}{2(67)} - \frac{\sqrt{2010^2 - 4(67)(201)}}{2(67)}$$

Al simplificar obtenemos:

$$r_1 + r_2 = -\frac{2010}{2(67)} - \frac{2010}{2(67)}$$

$$r_1 + r_2 = -\not{2}\left(\frac{2010}{\not{2}(67)}\right) = -\frac{2010}{67}$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{2010}{67} = -30$$

Al observar la ecuación $67x^2 + 2010x + 201 = 0$, podemos deducir los siguientes valores:

$$a = 67, \quad b = 2010 \quad \text{y} \quad c = 201$$

El resultado de la suma $r_1 + r_2$ está dada por la expresión:

$$r_1 + r_2 = -\frac{2010}{67} = -\frac{b}{a}$$

¿Es una coincidencia que $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$?

Veamos si de manera general la suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es $-\frac{b}{a}$.

En efecto: Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtenemos la suma de r_1 y r_2:

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_1 + r_2 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$r_1 + r_2 = -\cancel{2}\left(\frac{b}{\cancel{2}a}\right) = -\frac{b}{a}$$

Por lo tanto:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

Este resultado significa que la suma de las raíces de la ecuación $1004x^2 + 2008x + 1000 = 0$, es simplemente:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{2008}{1004} = -2$$

Para terminar esta unidad, resolvamos más problemas utilizando las estrategias explicadas hasta el momento.

Actividad 1.2.

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

CD1 CD2 CD3 CD4 CD8

Resuelve los siguientes problemas en equipo y expón tus soluciones ante el grupo.

Ejemplo 1.7. *Encuentra el resultado de la siguiente operación:*

$$2010 - 2009 + 2008 - 2007 + 2006 - 2005 + \ldots + 4 - 3 + 2 - 1$$

Solución

Si observamos la suma encontramos que hay un patrón, mismo que consiste en que existen parejas de números cuya resta es 1. A decir, son las siguientes:

$$2010 - 2009 = 1$$

$$2008 - 2007 = 1$$

$$\vdots$$

$$4 - 3 = 1$$

$$2 - 1 = 1$$

Al usar este patrón, se establece que:

$$2010-2009+2008-2007+\ldots+4-3+2-1 = (2010-2009)+(2008-2007)+\ldots+(4-3)+(2-1)$$

$$2010 - 2009 + 2008 - 2007 + \ldots + 4 - 3 + 2 - 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 + 1$$

Como hay 2010 números, entonces se pueden formar 1005 parejas y, por lo tanto, el resultado de la operación es 1005.

Ejemplo 1.8. *¿Cuál es la suma de las cifras de $10^{2009} - 97$?*

Solución

Para resolver el problema hacemos la siguiente tabla:

n, $n > 1$	$10^n - 97$	Suma de las cifras
2	$10^2 - 97 = 100 - 97 = 3$	3
3	$10^3 - 97 = 1000 - 97 = 903$	$9 + 0 + 3$
4	$10^4 - 97 = 10000 - 97 = 9903$	$9 + 9 + 0 + 3$
5	$10^5 - 97 = 100000 - 97 = 99903$	$9 + 9 + 9 + 0 + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si observas la tabla anterior podrás deducir que el número 9 que aparece en cada operación es dos menos que el exponente, es decir, si realizamos la operación $10^{2009} - 97$, el resultado debe consistir de 2007 nueves, un cero y un tres.

Por lo tanto, la suma de las cifras de $10^{2009} - 97$ es:

$$\underbrace{9+9+9+\cdots 9}_{2007 \text{ nueves}} + 0 + 3 = 2007(9) + 3 = 18063 + 3 = 18066$$

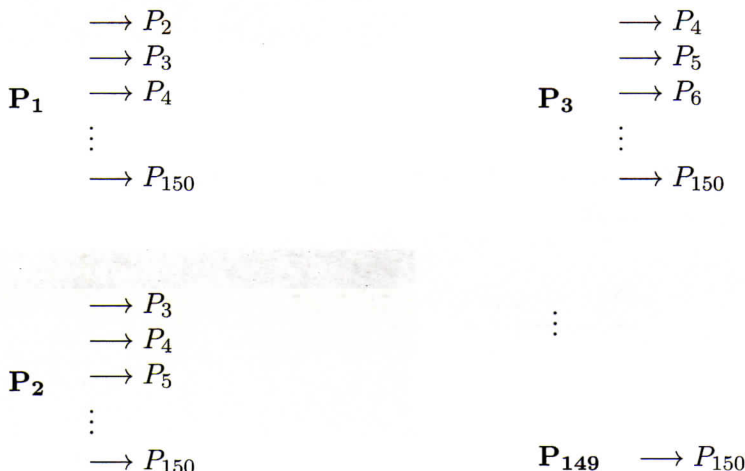
Ejemplo 1.9. *A una reunión en la que asistieron 150 personas, todas se saludan una sola vez. ¿Cuántos apretones de mano se dieron?*

Solución

Supongamos que las 150 personas forman el siguiente conjunto:

$$P = \{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{150}\}$$

Si denotamos con $P_1 \longrightarrow P_2$ al apretón de manos entre la persona P_1 y P_2, podemos hacer una figura que ilustre el problema para descubrir algo relevante.



Se ve en el diagrama anterior que para saber el total de apretones de mano, basta con contar el número de parejas distintas que pueden formarse con 150 personas, es decir, el problema es ***equivalente*** al siguiente:

Dado el conjunto $P = \{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{150}\}$, ¿cuántas parejas distintas pueden formarse con los 150 elementos anteriores?

La solución es muy simple si usamos combinaciones:

$$\binom{150}{2} = \frac{150!}{(150-2)!2!} = \frac{150!}{148! \cdot 2!} = \frac{150 \cdot 149 \cdot \cancel{1}48!}{\cancel{1}48! \cdot 2!} = \frac{150 \cdot 149}{2 \cdot 1} = 11175$$

Por lo tanto, el total de apretones en la reunión es 11175.

Ejemplo 1.10. *Encuentra el dígito de las unidades de 7^{2009}, cuando éste se escribe en notación decimal.*

Solución

Podemos hacer una tabla (1.5)de las primeras potencias de 7 y separar la última cifra para hallar un patrón.

7^n	Último dígito
$7^1 = 7$	7
$7^2 = 49$	9
$7^3 = 343$	3
$7^4 = 2401$	1
$7^5 = 16807$	7
$7^6 = 117649$	9
$7^7 = 823543$	3
$7^8 = 5764801$	1
$7^9 = 40353607$	7
$\vdots$	$\vdots$
7^{2009}	¿?

Tabla 1.5:

El último dígito de las potencias de 7 tiene un patrón o ciclo, éste puede resumirse en la tabla 1.6:

7^n	Último dígito
$7^1, 7^5, 7^9, \ldots$	7
$7^2, 7^6, 7^{10}, \ldots$	9
$7^3, 7^7, 7^{11}, \ldots$	3
$7^4, 7^8, 7^{12}, \ldots$	1

Tabla 1.6:

De aquí deducimos que las potencias de exponentes múltiplos de 4 su último dígito es 1, por lo tanto, 7^{2008} en un número cuyo último dígito es 1 y de aquí se deriva que 7^{2009} es un número que termina en 7.

Finalmente, el dígito de las unidades de 7^{2009} es 7.

Ejemplo 1.11. *En el plano mostrado en la figura 1.18 se ven cinco trapecios (el espacio entre puntos mide un centímetro). Si los numeramos de menor a mayor, ¿cuál es el área del trapecio que ocupa el lugar 2009?*

Solución

Si nos fijamos, por ejemplo, en el trapecio número cuatro pode-

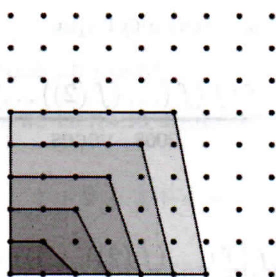


Figura 1.18: Trapecios.

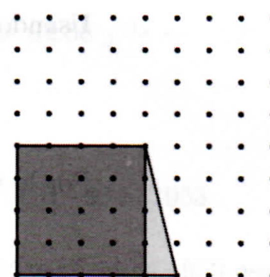


Figura 1.19: Trapecio número cuatro.

mos dividir la figura en un cuadrado y un triángulo rectángulo. Observa la figura 1.19:

En este trapecio, el cuadrado es de 4×4 y el triángulo rectángulo formado tiene 1 cm de base y 4 cm de altura.

De aquí deducimos que el trapecio 2009 está formado por un cuadrado de 2009×2009 y un triángulo rectángulo de 1 cm de base y 2009 cm de altura, por lo tanto, el área del trapecio 2009 es:

$$\text{Área trapecio} = 2009 \times 2009 + \frac{1 \times 2009}{2} = 2009^2 + \frac{2009}{2} = 4037085.5cm^2$$

Ejemplo 1.12. *Si $f(x) = x^{-1}$ para todo número real x diferente de cero, ¿cuál es el valor de la siguiente expresión?*

$$\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots\left(f\left(2\right)\right)\ldots\right)\right)\right)}_{2009 \quad veces}$$

Solución

Hacemos la tabla 1.7:

x	$f(x) = x^{-1}$
2	$f(2) = 2^{-1}$
2^{-1}	$f(f(2)) = f(2^{-1}) = \left(2^{-1}\right)^{-1} = 2$
2	$f(f(f(2))) = f(2) = 2^{-1}$
2^{-1}	$f(f(f(f(2)))) = f(2^{-1}) = \left(2^{-1}\right)^{-1} = 2$
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 1.7:

Al observar la tabla se puede deducir lo siguiente:

$$\underbrace{f\left(f(2)\right)}_{2 \text{ veces}} = \underbrace{f\left(f\left(\left(f(2)\right)\right)\right)}_{4 \text{ veces}} = \underbrace{f\left(f\left(f\left(f\left(\left(f(2)\right)\right)\right)\right)\right)}_{6 \text{ veces}} = \ldots = 2$$

Usando este patrón podemos establecer que:

$$\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots\left(f\left(2\right)\right)\ldots\right)\right)\right)}_{2008 \text{ veces}} = 2$$

Por lo tanto se tiene:

$$\underbrace{f\left(f\left(f\left(\ldots\left(f\left(2\right)\right)\ldots\right)\right)\right)}_{2009 \text{ veces}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 1.13. *Si en la sucesión de números* 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... *el entero* $\boldsymbol{n}$ *aparece* $\boldsymbol{n}$ *veces. ¿Cuál es el número que aparece en la posición* 2009*?*

Solución

Como cada número n aparece en la sucesión n veces, entonces debemos encontrar para qué número k se cumple la siguiente igualdad:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = 2009$$

Es decir, hasta qué número k debemos terminar la suma para tener 2009 términos de la sucesión.

Si utilizamos la suma de Gauss, obtenemos que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} = 2009, \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}^+$$

Resolvemos la siguiente ecuación:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 2009$$

$$k^2 + k = 4018$$

$$k^2 + k - 4018 = 0$$

Al utilizar la fórmula general de segundo grado, obtenemos:

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-4018)}}{2(1)}$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{16073}}{2}$$

De aquí se logran las siguientes soluciones:

$$k_1 = \frac{-1 + \sqrt{16073}}{2} \approx 62.88 \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{-1 - \sqrt{16073}}{2} \approx -63.88$$

Como $k \in \mathbb{Z}^+$, sólo consideramos $k = 62$ en lugar de 62.88 y la solución negativa no la tomamos en cuenta.

Para $k = 62$ se tiene lo siguiente:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 62 = \frac{62(62+1)}{2} = 31 \cdot 63 = 1953$$

Esto significa que si continuamos la serie hasta el 62, cubrimos 1953 espacios, es decir:

$$\underbrace{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \cdots, \underbrace{62, 62, 62, \cdots, 62}_{62 \text{ veces}}}_{1953 \text{ términos}}$$

De aquí deducimos que para tener 2009 términos, debemos considerar al número 63, es decir:

$$\underbrace{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \cdots, 62, 62, 62, \cdots, 62}_{1953 \text{ términos}}, \underbrace{63, 63, 63, \cdots, 63}_{63 \text{ términos}}$$

Como $1953 + 63 = 2016$, se garantiza que el término 2009 de la sucesión 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... es 63.

En la pantalla de una computadora aparece el número 123. Cada minuto la computadora suma 102 al número que está en la pantalla. El jugador puede intercambiar el orden de los dígitos en la pantalla cuando lo desee. ¿Puede lograr que nunca aparezca un número de cuatro dígitos en la pantalla?

Ejemplo 1.14.

Solución

Si comenzamos con el número 123, al siguiente minuto la computadora suma 102 y resulta 225, ello lo vamos a denotar para facilitar el problema de la manera siguiente:

$$123 \xrightarrow{+102} 225$$

Como el resultado es 225 no conviene intercambiar los dígitos del número. Al siguiente minuto se tiene que:

$$225 \xrightarrow{+102} 327$$

Como el resultado es 327, aquí conviene invertir los dígitos para formar el número 237. A este intercambio lo podemos denotar como:

$$225 \xrightarrow{+102} 327 \looparrowleft 237$$

Si usamos esta notación, podemos elaborar la siguiente lista:

(1) $123 \xrightarrow{+102} 225$

(2) $225 \xrightarrow{+102} 327 \hookleftarrow 237$

(3) $237 \xrightarrow{+102} 339$

(4) $339 \xrightarrow{+102} 441 \hookleftarrow 144$

(5) $144 \xrightarrow{+102} 246$

(6) $246 \xrightarrow{+102} 348$

(7) $348 \xrightarrow{+102} 450 \hookleftarrow 045$

(8) $045 \xrightarrow{+102} 147$

(9) $147 \xrightarrow{+102} 249$

(10) $249 \xrightarrow{+102} 351 \hookleftarrow 135$

(11) $135 \xrightarrow{+102} 237$

(12) $237 \xrightarrow{+102} 339$

(13) $339 \xrightarrow{+102} 441 \hookleftarrow 144$

$\vdots$

Observa que en el paso 12 obtenemos 339 y es el mismo resultado que logramos en el paso número 3; por lo tanto, se forma un ciclo o un patrón.

Finalmente, se puede afirmar que nunca aparecerá un número de cuatro dígitos en la pantalla.

Ejemplo 1.15. *En una urna se colocan* 2009 *canicas marcadas con los números* 1, 2, $\cdots$, 2009. *Se sacan al azar* 2 *canicas de la urna, y se calcula la suma de los números en ellas. ¿Qué es más probable, que la suma sea par o que sea impar?*

Solución

Podemos recordar algunas propiedades de los números naturales:

(a) La suma de números pares es par.

(b) La suma de una cantidad par de números impares es par.

(c) La suma de una cantidad impar de impares es impar.

(d) La suma de un par y un impar es impar.

Como 2009 es impar, entonces en la urna hay 1004 números pares y 1005 números impares.

Para que la suma de 2 números extraídos al azar sea par, debemos considerar los siguientes casos:

Caso 1 Los dos números extraídos son pares, ya que $par + par = par$. Así, el total de casos que cumplen con ello es:



$$\binom{1004}{2} = \frac{1004!}{(1004-2)!2!} = \frac{1004!}{1002! \cdot 2!} = \frac{1004 \cdot 1003 \cdot \not{1}002!}{\not{1}002! \cdot 2!} = \frac{1004 \cdot 1003}{2} = 503506$$

Caso 2 Los dos números extraídos son impares; *impar* + *impar* = *par*. En este caso el total de casos que cumplen con este caso son:

$$\binom{1005}{2} = \frac{1005!}{(1005-2)!2!} = \frac{1005!}{1003! \cdot 2!} = \frac{1005 \cdot 1004 \cdot \not{1}003!}{\not{1}003! \cdot 2!} = \frac{1005 \cdot 1004}{2} = 504510$$



El total de casos en el que la suma sea par es $503506 + 504510 = 1008016$.

Para que la suma de 2 números extraídos al azar sea impar, sólo es posible si uno de los números es par y el otro par. Por el principio de la multiplicación, el total de casos es $1004 \times 1005 = 1009020$.

Por lo tanto, al sacar 2 canicas de la urna es más probable que la suma sea impar.



Problemas a resolver

Resuelve los siguientes ejercicios escribiendo con todo detalle cada paso de tu solución.

1. Los enteros mayores que 1 son acomodados en 5 columnas, como se muestra:

	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
	.	.	.	.

4 enteros consecutivos aparecen en cada fila, en la primera, tercera y siguientes filas impares los enteros aparecen en las cuatro últimas columnas y se incrementan de izquierda a derecha. En la segunda, cuarta y siguientes filas pares, los enteros aparecen en las primeras cuatro columnas y se incrementan de derecha a izquierda. ¿En qué columna se encuentra el número 2009?.

(a) Primera. (b) Segunda. (c) Tercera.
(d) Cuarta. (e) Quinta.

2. Si el patrón de la figura se continúa, ¿cuántas letras K necesitamos?

```
            D
        C   D
    B   C   D
A   B   C   D . . .
    B   C   D
        C   D
            D
```

(a) 45 (b) 21 (c) 49
(d) 60 (e) 18

3. Encuentra el último dígito de $9^{2008} \times 16^{2009}$.

(a) 1 (b) 4 (c) 6
(d) 8 (e) 9

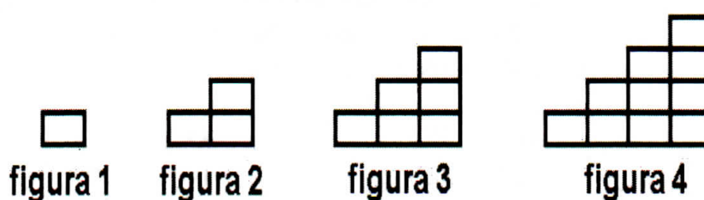
4. Si la siguiente serie continúa indefinidamente:

$27 = 3\times3\times3$, $207 = 3\times3\times23$, $2007 = 3\times3\times223$, $20007 = 3\times3\times2223$, ·

¿Cuál de los números es múltiplo de 81?

(a) 200007 (b) 2000000007 (c) 20000000000007
(d) 20000007 (e) 200000000007

5. María Fernanda construye las siguientes figuras con cajitas de cartón. Si forma la figura 2008, ¿cuántas cajas le faltan para construir la figura 2009?

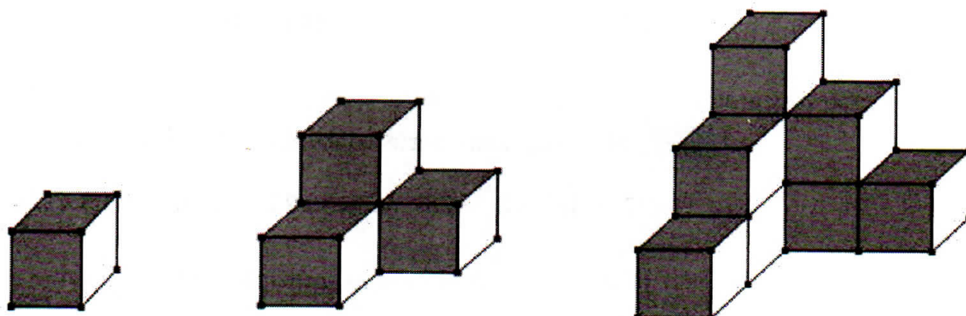


(a) 2008 (b) 2009 (c) 2011
(d) 2012 (e) 2007

6. Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos, que al azar se van sacando. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que deben sacarse para garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color?

(a) 1960 (b) 1977 (c) 1981
(d) 1955 (e) 2001

7. En las siguientes figuras se muestran tres arreglos de cubos que llamamos figura 1, 2 y 3, respectivamente. ¿Cuántos cubos habrá en la figura 2009?



(a) 4036081 (b) 4040100 (c) 4038090
(d) 4032064 (e) 4028049

8. En cierta carrera a campo traviesa, compiten dos equipos de cinco integrantes cada uno. Si un participante termina en la *n-ésima* posición, éste contribuye con n puntos al marcador del equipo, siendo aquel que logre menos puntos el que gane. Si no hay empates entre corredores, ¿cuántos puntajes ganadores son posibles?

(a) 10 (b) 13 (c) 27
(d) 120 (e) 126

9. Observa las igualdades siguientes:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2$$
$$\vdots$$

Con base a lo anterior, si $2009^2 + x^2 = y^2$ el valor de $x + y$ es:

(a) 4036080 (b) 4036081 (c) 2018040
(d) 2018041 (e) 2018040.5

10. Supongamos que $s(n)$ denota a la suma de los dígitos del número n, por ejemplo, $s(3425) = 3+4+2+5 = 14$. Si $s^2(n) = s(s(n))$, $s^3(n) = s(s(s(n)))$, y así sucesivamente, ¿cuál es el valor de $s^{2009}(2009)$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3
(d) 4 (e) 5

11. Iniciamos con el número 2009 y construimos una lista de la siguiente forma: cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del número anterior, es decir, el segundo número de la lista es 85, el tercero es 89, el cuarto es 145 y así sucesivamente. ¿Qué número ocupa el lugar 2009?

(a) 20 (b) 4 (c) 16
(d) 67 (e) 85

12. Un camino circular está formado de 17 piedras que numeramos 0, 1, 2, 3, ..., 16. Daniela empieza en la piedra número 0 y se mueve a la 1. Luego da cuatro pasos, hasta la número 5; luego da 9 pasos hasta la piedra 14 y así continúa hasta que al final da 2009^2 pasos y se pone a descansar. ¿En qué piedra está descansando?

(a) 11 (b) 12 (c) 13
(d) 14 (e) 15

13. Se escribe un número que tiene 2009 dígitos siguiendo el siguiente patrón:

$$327719327719327719327719\ldots$$

¿Cuáles son los dos últimos dígitos que se escribieron?

(a) 71 (b) 19 (c) 72
(d) 27 (e) 32

14. Hypatia tienen 3 jarras, una de ellas con capacidad de 16 litros, la otra 11 y la última 6 y ninguna de ellas está graduada. La mayor se encuentra llena de agua, las otras dos están vacías, hay que hacer varios movimientos hasta tener exactamente 8 litros de agua en una de las jarras. Explica cómo es posible lograrlo.

15. Observa las igualdades siguientes:

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 11111111$$

$$\vdots$$

Si denotamos con a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n a las igualdades anteriores, ¿cuál es la suma de los dígitos del término a_{2009}?

(a) 2009 (b) 1 (c) 4018

(d) 1111 (e) $\underbrace{1111111\ldots11}_{2009}$

16. En un tablero de ajedrez hay 32 casillas blancas y 32 negras. Elimina la casilla de la esquina superior derecha y la de la inferior izquierda. ¿Puedes cubrir el tablero de ajedrez con fichas de dominó, si cada ficha cubre dos casillas?

17. Inicialmente, las casillas 1 y 3 del tablero mostrado están pintadas de blanco, mientras que las casillas 2 y 4 están pintadas de negro.

1	2
4	3

Cada determinado tiempo, una de las casillas cambia su color al opuesto. Si las casillas cambian en este orden: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, etcétera. Muestra el aspecto del tablero después del cambio número 2009.

18. ¿Puedes llenar un tablero de 3×3 con números del conjunto $\{-1, 0, 1\}$ de manera que las sumas de los números por renglón, por columna y por diagonal sean diferentes? Argumenta tu respuesta.

19. Un edificio tiene sus pisos numerados del 0 al 25. El ascensor del edificio cuenta con sólo dos botones, uno rojo y otro verde. Al apretar el botón rojo asciende 7 pisos y al apretar el verde desciende 9 pisos. Si se oprime el botón rojo cuando no hay suficientes pisos por encima, el ascensor se rompe, lo mismo ocurre cuando se oprime el botón verde y no hay suficientes pisos por debajo. Da una secuencia de botones que permita subir del piso 0 al 11 usando el ascensor.

20. En una cárcel hay 10 reos a los que se les va a dar una oportunidad para salir libres. Se formarán los 10 en una fila y a cada uno se le pondrá un sombrero, ya sea blanco o negro. Cada reo sólo podrá ver el color de los sombreros de sus compañeros que están formados delante de él. A cada uno de ellos, a partir del último y siguiendo el orden de la fila, se le preguntará: ¿cuál es el color de su sombrero? Si responde correctamente, será liberado. ¿Cómo pueden hacer los reos para ponerse de acuerdo y que liberen al menos a 9 de ellos?

21. Un gusano se desplaza verticalmente sobre un árbol. Cada día puede solamente subir o bajar. Si el primer día recorre 1 *cm*, y el segundo 2 *cm*, y así sucesivamente, ¿es posible que después de 17 días el gusano se encuentre en el lugar de donde partió?

22. En las casillas de un tablero de 3×3 hay 9 focos que cambian de estado (encendido y apagado). Apretando un foco de las orillas del tablero, éste cambia de estado junto con sus vecinos (a los lados y en diagonal) y si apretamos el foco del centro, cambian de estado los 8 restantes. Inicialmente, todos los focos están apagados. ¿Es posible que todos ellos queden encendidos?

23. Un número n puede ser reemplazado por ab si $n = a + b$, donde a y b son números naturales. Por ejemplo, si $n = 24$ y lo escribimos como $n = 14 + 10$, lo reemplazmos por $14 \times 10 = 140$. Luego, si 140 lo escribimos como $140 = 131 + 9$, 140 se reemplaza por $131 \times 9 = 1179$ y así sucesivamente formamos una serie de números por *reemplazos*. ¿Es posible obtener al número 2009 iniciando con el 17 mediante alguna serie de tales reemplazamientos?

Unidad 2

Solución creativa de problemas aritméticos y algebraicos

¿Hacia dónde vamos?

En el nivel **atender**, el alumno:

- Identificará técnicas de resolución a problemas aritméticos y algebraicos.

En el nivel **entender**, el alumno:

- Concebirá diferentes soluciones a problemas aritméticos y algebraicos.

En el nivel **juzgar**, el alumno:

- Resolverá de diferentes formas problemas aritméticos y algebraicos.
- Comparará las distintas soluciones de un problema aritmético o algebraico.
- Relacionará la creatividad con la solución de problemas aritméticos y algebraicos.

En el nivel **valorar**, el alumno:

- Solucionará en forma creativa problemas aritméticos y algebraicos.
- Deliberará la importancia de resolver en forma creativa problemas aritméticos y algebraicos para el desarrollo del razonamiento matemático.

2.1. Solución creativa de problemas aritméticos y algebraicos

Niveles de Operación de la Actividad Consciente Intencional

Para la inteligencia	Para la reflexión	Para la deliberación
¿Qué es una solución creativa de un problema aritmético algebraico?	*¿Cómo se reconoce una solución creativa de un problema aritmético o algebraico?*	*¿Para qué sirve resolver problemas de manera creativa?*

2.1.1. Problemas aritméticos

Para resolver problemas de tipo aritmético o algebraico no siempre se logra con los métodos tradicionales, ya que también es posible hacerlo a través de ideas creativas. Veamos algunos problemas donde una buena dosis de ingenio nos ayudará para resolverlos.

Actividad 2.1.

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

CD1 CD2 CD3 CD4 CD8

Resuelve en equipo los siguientes problemas:

Ejemplo 2.1.

Encuentra el dígito de las unidades de la expresión:

$$9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + \cdots + 9^{2008} + 9^{2009}$$

Solución

Si intentamos obtener el resultado de toda la suma, sería bastante tardado o imposible.

Hagamos lo siguiente:

Escribimos el resultado de las primeras potencias de 9:

$$9^1 = \mathbf{9} \qquad 9^4 = 656\mathbf{1}$$

$$9^2 = 8\mathbf{1} \qquad 9^5 = 5904\mathbf{9}$$

$$9^3 = 72\mathbf{9} \qquad \vdots$$

(a) El último dígito de las potencias 9^1, 9^3, 9^5, $\cdots$, 9^{2009} es 9

(b) El último dígito de las potencias 9^2, 9^4, 9^6, $\cdots$, 9^{2008} es 1

Al observar la lista se puede deducir lo siguiente:

Agrupamos la suma $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + \cdots + 9^{2008} + 9^{2009}$ de la siguiente manera:

$$\left(9^1 + 9^2\right) + \left(9^3 + 9^4\right) + \cdots + \left(9^{2007} + 9^{2008}\right) + 9^{2009}$$

El último dígito en cada paréntesis es $9 + 1 = 0$ y la de 9^{2009} es 9, es decir:

$$\underbrace{\left(9^1 + 9^2\right)}_{\text{último dígito es 0}} + \underbrace{\left(9^3 + 9^4\right)}_{\text{último dígito es 0}} + \cdots + \underbrace{\left(9^{2007} + 9^{2008}\right)}_{\text{último dígito es 0}} + \underbrace{9^{2009}}_{\text{último dígito es 9}}$$

Por lo tanto, el último dígito de la suma $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + \cdots + 9^{2008} + 9^{2009}$ es 9.

Ejemplo 2.2.

Obtén el resultado del siguiente producto:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2008}\right)\left(1 - \frac{1}{2009}\right)$$

Solución

Hacemos la cuenta en cada paréntesis:

$$\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdots\left(\frac{2008-1}{2008}\right)\left(\frac{2009-1}{2009}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{7}{2008}\right)\left(\frac{2008}{2009}\right)$$

Sin realizar el producto de fracciones, se puede efectuar la simplificación que inmediatamente se muestra:

$$\left(\frac{1}{\not 2}\right)\left(\frac{\not 2}{\not 3}\right)\left(\frac{\not 3}{\not 4}\right)\cdots\left(\frac{\not 7}{\not 2008}\right)\left(\frac{\not 2008}{2009}\right)$$

Por lo tanto, el resultado final del producto es:

$$\frac{1}{2009}$$

Ejemplo 2.3. *Si se define la operación ∇ como $a\nabla b = 2 + \frac{a+b}{b}$ para $b \neq 0$. Determina el valor del menor entero x mayor que 1 tal que $(4\nabla 2)\nabla x$ sea un entero.*

Solución

Calculamos $4\nabla 2$ utilizando la definición de la operación ∇:

$$4\nabla 2 = 2 + \frac{4+2}{2} = 2 + \frac{6}{2} = 5$$

Calculamos $5\nabla x$ utilizando la definición de la operación ∇:

$$5\nabla x = 2 + \frac{5+x}{x}$$

Podemos escribir a la expresión $5\nabla x = 2 + \frac{5+x}{x}$ de la siguiente manera:

$$5\nabla x = 2 + \frac{5+x}{x} = 2 + \frac{5}{x} + \frac{x}{x} = 2 + \frac{5}{x} + 1 = 3 + \frac{5}{x}$$

Para que $5\nabla x = 3 + \frac{5}{x}$ sea un entero, x debe ser el menor divisor de 5 distinto de 1, por lo tanto x es 5.

Ejemplo 2.4. *¿Cuál es la suma de todos los números obtenidos al permutar los dígitos del número 3912?*

Solución

La primera solución es escribir las 24 permutaciones y sumar todos los números. Verifica que el resultado es 99990.

Resolvemos por casos:

Caso 1 Calculamos las 6 permutaciones con el primer número fijo, por ejemplo, 3912, 3921, 3219, 3291, 3192, 3129 y organizamos la información en la tabla 2.1, como se muestra a continuación:

Primer dígito (unidad de millar)	Segundo dígito (centena)	Tercer dígito (decena)	Primer dígito (unidad)
3	9	1	2
3	9	2	1
3	2	9	1
3	2	1	9
3	1	2	9
3	1	9	2

Tabla 2.1:

Observa que la suma de los números en la primera columna de izquierda a derecha es 18, mientras que a partir de la segunda columna la suma es 24:

$$3+3+3+3+3+3=18$$

$$9+9+2+2+1+1=24$$

$$1+2+9+1+2+9=24$$

$$2+1+1+9+9+2=24$$

A partir de ello podemos establecer la suma de los 6 números de la manera siguiente:

$$3912+3921+3291+3219+3129+3192=18(1000)+24(100+10+1)=20664$$

Por lo tanto, la suma de los números 3912, 3921, 3219, 3291, 3192, 3129 es 20664.

Caso 2 Si fijamos el número 1 se forman los números 1392, 1329, 1932, 1923, 1239 y 12293.

Escribimos los números en la tabla 2.2:

Primer dígito (unidad de millar)	Segundo dígito (centena)	Tercer dígito (decena)	Primer dígito (unidad)
1	3	9	2
1	3	2	9
1	9	3	2
1	9	2	3
1	2	3	9
1	2	9	3

Tabla 2.2:

Si procedemos de manera análoga al primer caso, la suma de los 6 números formados es: $6(1000)+28(100+10+1)=9108$
Comprueba que la suma de todos los números de 4 dígitos que comienzan con 2 y 9 es 14886 y 55332 respectivamente.

Finalmente la suma de todos los números obtenidos al permutar los dígitos del número 3912 es:

$$20664+9108+14886+55332=99990$$

Ejemplo 2.5. *Obtén el resultado de la siguiente operación:*

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^6+\cdots-2008^2+2009^2$$

Solución

Observemos lo siguiente.

$$1^2 - 2^2 = (1-2)(1+2) = (-1)(1+2)$$
$$3^2 - 4^2 = (3-4)(3+4) = (-1)(3+4)$$
$$5^2 - 6^6 = (5-6)(5+6) = (-1)(5+6)$$
$$\vdots$$

Si agrupamos de la siguiente manera y utilizamos lo anterior, se deduce que:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-2008^2+2009^2 = (1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(2007^2-2008^2)+2009^2$$

$$= (1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+(5-6)(5+6)+\cdots+(2007-2008)(2007+2008)+2009^2$$

$$= (-1)(1+2)+(-1)(3+4)+(-1)(5+6)+\cdots+(-1)(2007+2008)+2009^2$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-2008^2+2009^2 = (-1)\left[1+2+3+4+5+6+\cdots+2007+2008\right]+2009^2$$

Usando la suma de Gauss, obtenemos:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-2008^2+2009^2 = (-1)\left[\frac{2008\cdot 2009}{2}\right]+2009^2$$

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-2008^2+2009^2 = (-1)(2017036)+4036081 = -2017036+4036081$$

Finalmente, el resultado es:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-2008^2+2009^2 = 2019045$$

Ejemplo 2.6. *Obtén la suma de todos los enteros entre 50 y 350, cuyo último dígito es 1.*

Solución

Si llamamos a S a la suma que deseamos calcular, entonces S está dada por la siguiente expresión:

$$S = 51+61+71+81+\cdots+341$$

Podemos escribir a S como:

$$S = (50+1)+(60+1)+(70+1)+\cdots(340+1)$$

$$S = 10\,(5+6+7+9+\cdots+34)+\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{30\text{ veces }1}$$

$$S = 10\,(5+6+7+9+\cdots+34)+30$$

Podemos calcular la suma anterior de la siguiente manera:

$$S = 10\,(5+6+7+9+\cdots+34)+30 = 10\,(1+2+3+4+\cdots+34)-10\,(1+2+3+4)+30$$

$$S = 10\,(5+6+7+9+\cdots+34)+30 = 10\left(\frac{34\cdot 35}{2}\right) - 10\,(10)+30$$

$$S = 10\,(5+6+7+9+\cdots+34)+30 = 10\,(595) - 10\,(10)+30 = 5880$$

Ejemplo 2.7. *Exactamente dos números enteros entre 75 y 85 son divisores de $3^{32}-1$. ¿Cuál es el producto de estos números?*

Solución

Si hacemos la cuenta, resulta lo siguiente:

$$3^{32}-1 = 1853020188851840$$

Es claro que hallar los divisores buscados es complejo o aburrido, mejor procedemos de otra manera.

Si utilizamos la factorización de una diferencia de cuadrados, obtenemos la igualdad:

$$3^{32}-1 = \left(3^{16}\right)^2 - 1 = \left(3^{16}-1\right)\left(3^{16}+1\right)$$

Si aplicamos nuevamente la factorización, obtenemos:

$$3^{32}-1 = \left(3^{16}\right)^2 - 1 = \left(3^{16}-1\right)\left(3^{16}+1\right) = \left[\left(3^{8}\right)^2-1\right]\left(3^{16}+1\right)$$

$$3^{32}-1 = \left(3^{8}-1\right)\left(3^{8}+1\right)\left(3^{16}+1\right)$$

$$3^{32}-1 = \left[\left(3^{4}\right)^2-1\right]\left(3^{8}+1\right)\left(3^{16}+1\right)$$

$$3^{32}-1 = \left(3^{4}-1\right)\left(3^{4}+1\right)\left(3^{8}+1\right)\left(3^{16}+1\right)$$

Los números buscados son $3^4-1=80$ y $3^4+1=82$, ya que ambos son mayores a 75 y menores que 85. Por lo tanto, su producto es $80\times 82 = 6560$.

Ejemplo 2.8. *¿Cuántos cuadrados perfectos entre 1 y 1001 son divisibles por 2?*

Solución

Recordemos que los cuadrados perfectos se forman al elevar a la segunda potencia a los números naturales. Aprecia la tabla 2.3:

n	n^2
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^2 = 9$
4	$4^2 = 16$
5	$5^2 = 25$
6	$6^2 = 36$
$\vdots$	$\vdots$
31	$31^2 = 961$
32	$32^2 = 1024$

Tabla 2.3:

Al observar la tabla se deduce que el último cuadrado que es menor a 1001 es $31^2 = 961$. Así que son 31 los cuadrados perfectos que se hallan entre 1 y 1001:

$$1^1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, 31^2$$

De los 31 números descartamos a los impares, que son 16, y los 15 restantes son los números que buscamos, es decir, son cuadrados perfectos y divisibles por 2.

2.1.2. Problemas algebraicos

Ejemplo 2.9. *Si la suma de dos números es 30 y su producto es 15, ¿cuál es la suma de sus recíprocos?*

Solución

A partir del enunciado del problema establecemos el sistema de ecuaciones que a continuación se muestra:

$$\begin{cases} x + y = 30 & (1) \\ xy = 15 & (2) \end{cases}$$

Despejamos y de la igualdad (1) y sustituimos en la (2) para obtener la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 30x + 15 = 0$$

Resolvemos por la fórmula general:

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 60}}{2}$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{840}}{2} = \frac{30 \pm \sqrt{4 \cdot 210}}{2}$$

$$x == \frac{30 \pm 2\sqrt{210}}{2} = 15 \pm \sqrt{210}$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación son los siguientes números:

$$x_1 = 15 + \sqrt{210} \quad \text{y} \quad x_2 = 15 - \sqrt{210}$$

Cada uno de los números obtenidos los sustituimos en la ecuación (1) y despejamos y:

Para $x_1 = 15 + \sqrt{210}$, se obtiene $y_1 = 15 - \sqrt{210}$ y la suma de los recíprocos de x_1 y y_1 es:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{15 + \sqrt{210}} + \frac{1}{15 - \sqrt{210}} = 2$$

Para $x_2 = 15 - \sqrt{210}$, se obtiene $y_2 = 15 + \sqrt{210}$ y la suma de los recíprocos de x_2 y y_2 es:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{15 - \sqrt{210}} + \frac{1}{15 + \sqrt{210}} = 2$$

Concluimos que para cualquiera de las soluciones obtenidas, la suma de los recíprocos es 2.

Otra solución es la que inmediatamente se presenta:

Solución

Partimos del sistema establecido anteriormente:

$$\begin{cases} x + y = 30 & (1) \\ xy = 15 & (2) \end{cases}$$

Como se quiere obtener la suma de los recíprocos de los números x y y, debemos obtener el resultado de esta expresión:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = ?$$

Al simplificar la expresión se obtiene: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$

Observa que al sustituir las expresiones (1) y (2) se logra el resultado de la solución anterior:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{30}{15}=2$$

Ejemplo 2.10. *Si $t=\frac{1}{2}\left(x^3-\frac{1}{3}\right)$ con $x>0$, ¿a qué es igual $\sqrt{t^2+1}$?*

Solución

$$\begin{aligned}
t^2+1 &= \left[\frac{1}{2}\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)\right]^2+1\\
&= \frac{1}{4}\left[x^6-2+\frac{1}{x^6}\right]+1\\
&= \frac{1}{4}\left[x^6+\frac{1}{x^6}\right]-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}\left[x^6+\frac{1}{x^6}\right]+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{4}x^6+\frac{1}{4x^6}+\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2x^3}\right)^2
\end{aligned}$$

Extraemos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\sqrt{t^2+1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2x^3}\right)^2}=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2x^3}\\
&= \frac{1}{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos lo siguiente:

$$\sqrt{t^2+1}=\frac{1}{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$$

Ejemplo 2.11. *¿Cuál es la suma de los coeficientes de todos los términos del binomio $(3x-2y)^{10}$?*

Solución

Desarrollamos la expresión $(3x-2y)^{10}$ usando el binomio de Newton:

$$(3x-2y)^{10}=\binom{10}{0}(3x)^{10-0}(-2y)^0+\binom{10}{1}(3x)^{10-1}(-2y)^1+$$

$$+\binom{10}{2}(3x)^{10-2}(-2y)^2+\cdots+\binom{10}{10}(3x)^{10-10}(-2y)^{10}$$

$$(3x-2y)^{10}=59049-x^{10}-393660-x^9y+1180980x^8y^2-2099520x^7y^3+$$

$$+2449440x^6y^4-1959552x^5y^5+1088640x^4y^6-$$

$$-414720x^3y^7+103680x^2y^8-15360xy^9+1024y^{10}$$

Separamos todos los coeficientes de la expresión y obtenemos la suma:

59049-393660+1180980-2099520+2449440-1959552+1088640-414720+103680-15360+1024=1

Otra solución es la que a continuación se presenta:

Solución

Como se quiere obtener la suma de todos los coeficientes del binomio $(3x-2y)^{10}$, basta con sustituir $x=1$ y $y=1$ en la expresión siguiente, ya que no interesa la parte algebraica de los términos del binomio.

$$(3x-2y)^{10}=\binom{10}{0}(3x)^{10-0}(-2y)^0+\binom{10}{1}(3x)^{10-1}(-2y)^1+$$

$$+\binom{10}{2}(3x)^{10-2}(-2y)^2+\cdots+\binom{10}{10}(3x)^{10-10}(-2y)^{10}$$

Es decir:

$$(3\cdot1-2\cdot1)^{10}=\binom{10}{0}(3\cdot1)^{10-0}(-2\cdot1)^0+\binom{10}{1}(3\cdot1)^{10-1}(-2\cdot1)^1+$$

$$+\binom{10}{2}(3\cdot1)^{10-2}(-2\cdot1)^2+\cdots+\binom{10}{10}(3\cdot1)^{10-10}(-2\cdot1)^{10}$$

Pero es más fácil hacer la cuenta en el lado izquierdo de la igualdad, es decir:

$$(3\cdot1-2\cdot1)^{10}=(3-2)^{10}=1^{10}=1$$

Ejemplo 2.12. *Si x, y son dos números (posiblemente complejos) que satisfacen las ecuaciones $x+y=5$ y $xy=8$, ¿cuál es el valor de x^3+y^3?*

Solución

Elevamos al cubo la ecuación $x+y=5$:

$$(x+y)^3 = 5^3$$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=125$$

$$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=125$$

Factorizamos:

$$x^3+y^3+3xy\,(x+y)=125$$

Despejamos x^3+y^3:

$$x^3+y^3=125-3xy\,(x+y)$$

Como $x+y=5$ y $xy=8$, sustituimos y obtenemos lo siguiente:

$$x^3+y^3=125-3(8)(5)=125-120=5$$

Por lo tanto:

$$x^3+y^3=5$$

Ejemplo 2.13. *¿Cuál es el producto de las raíces de la ecuación $134x^2+5x+2010=0$?*

Solución

Al aplicar la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado, se obtiene:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(134)(2010)}}{2(134)}$$

Las dos raíces son las siguientes:

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{5^2-4(134)(2010)}}{2(134)} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-5-\sqrt{5^2-4(134)(2010)}}{2(134)}$$

En lugar de hacer las cuentitas para encontrar el valor de cada una de las raíces, podemos calcular el producto:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-5+\sqrt{5^2-4(134)(2010)}}{2(134)}\right)\left(\frac{-5-\sqrt{5^2-4(134)(2010)}}{2(134)}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-5+\sqrt{5^2-4(134)(2010)}\right)\left(-5-\sqrt{5^2-4(134)(2010)}\right)}{2^2 \cdot 134^2}$$

Observa que las expresiones en el numerador de la fracción anterior son binomios conjugados, entonces si realizamos el producto notable, se obtiene que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-5)^2 - \left(\sqrt{5^2-4(134)(2010)}\right)^2}{2^2 \cdot 134^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5^2 - \left(5^2-4(134)(2010)\right)}{2^2 \cdot 134^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5^2 - 5^2 + 4(134)(2010)}{2^2 \cdot 134^2} = \frac{\cancel{4}(\cancel{134})(2010)}{\cancel{2^2} \cdot \cancel{134} \cdot 134}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2010}{134}$$

Observa que el resultado obtenido es el cociente de los coeficientes c y a de la ecuación $134x^2 + 5x + 2010 = 0$, es decir:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2010}{134} = \frac{c}{a}$$

¿Es coincidencia?, o ¿en general se cumple? Para responder a esta interrogante, resolvamos el problema de manera general.

Si consideramos a la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, entonces el valor de x está dado por la expresión siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las dos raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Calculamos el producto de las raíces:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2^2 a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{2^2 a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{2^2 a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{2^2 a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{2^2 a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\not{4}\ \not{a}c}{\not{4}\ \not{a}a}$$

Por lo tanto:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo 2.14. *Si $a+b=1$ y $ab=1$, ¿cuál es el valor de $a+a^2+a^3+b+b^2+b^3$?*

Solución

Agrupamos algunos términos de la expresión:

$$a + a^2 + a^3 + b + b^2 + b^3 = (a+b) + (a^2+b^2) + (a^3+b^3)$$

Completamos el binomio al cuadrado y al cubo:

$$a + a^2 + a^3 + b + b^2 + b^3 = (a+b) + (a^2 + 2ab + b^2) + (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) - \\ - 2ab - 3a^2b - 3ab^2$$

Factorizamos:

$$a + a^2 + a^3 + b + b^2 + b^3 = (a+b) + (a+b)^2 + (a+b)^3 - 2(ab) - 3ab[a+b]$$

Como $a+b=1$ y $ab=1$, se obtiene lo siguiente al sustituir estos valores:

$$\begin{aligned} a + a^2 + a^3 + b + b^2 + b^3 &= 1 + 1^2 + 1^3 - 2(1) - 3(1)(1) \\ &= 3 - 2 - 3 = -2 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$a + a^2 + a^3 + b + b^2 + b^3 = -2$$

Ejemplo 2.15. *Si $2x - 3y + 4z = 600$ y $3x - 12y + 9z = -198$, ¿cuál es el valor de $x + y + z$?*

Solución

Estamos acostumbrados a resolver un sistema de 3×3, siempre que se tienen las 3 ecuaciones; sin embargo, al poseer sólo dos ecuaciones parece imposible resolverlo. Sin embargo, al realizar una manipulación adecuada a las ecuaciones es posible lograr el resultado.

Primero dividamos la ecuación $3x - 12y + 9z = -198$ por 3:

$$\frac{3x - 12y + 9z}{3} = -\frac{198}{3}$$

$$\frac{3x}{3} - \frac{12y}{3} + \frac{9z}{3} = -\frac{198}{3}$$

$$x - 4y + 3z = -66$$

Restemos esta expresión con $2x - 3y + 4z = 600$:

$$[x - 4y + 3z] - [2x - 3y + 4z] = -66 - 600 = -666$$

Quitamos paréntesis: $x - 4y + 3z - 2x + 3y - 4z = -666$

Simplificamos: $-x - y - z = -666$

Multiplicamos por (-1) ambos lados de la igualdad: $(-1)(-x-y-z) = (-1)(-666)$

Finalmente obtenemos el resultado buscado: $x + y + z = 666$

Ejemplo 2.16. *Si $\dfrac{2x + 3y}{x - y} = \dfrac{2}{3}$, ¿cuál es el valor de $\dfrac{x}{y}$?*

Solución

Para lograr la expresión $\dfrac{x}{y}$, podemos dividir al numerador y denominador de la expresión del lado izquierdo por y:

$$\frac{\frac{2x + 3y}{y}}{\frac{x - y}{y}} = \frac{2}{3}$$

Separamos en fracciones:

$$\frac{\frac{2x}{y} + \frac{3y}{y}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{y}} = \frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{2\left(\frac{x}{y}\right) + 3}{\frac{x}{y} - 1} = \frac{2}{3}$$

Despejamos $\frac{x}{y}$:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)+3=\frac{2}{3}\left[\frac{x}{y}-1\right]$$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)+3=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{2}{3}$$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{2}{3}-3$$

$$\frac{x}{y}\left[2-\frac{2}{3}\right]=-\frac{2}{3}-3$$

$$\frac{x}{y}\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{11}{3}$$

$$\frac{x}{y}=-\frac{\frac{11}{3}}{\frac{4}{3}}$$

Finalmente, logramos el resultado: $\frac{x}{y}=-\frac{11}{4}$

Ejemplo 2.17. *Si $x=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}$, ¿cuál es el valor de $x+\frac{1}{x}$?*

Solución

Como $x=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}$, podemos, entonces, escribir lo siguiente:

$$x=1+\sqrt{x},\quad \text{donde } x=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}$$

Por otro lado, calculamos $x+\frac{1}{x}$:

$$x+\frac{1}{x}=(1+\sqrt{x})+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})+1}{1+\sqrt{x}}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{(1+\sqrt{x})^2+1}{1+\sqrt{x}}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1+2\sqrt{x}+x+1}{1+\sqrt{x}}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{2+2\sqrt{x}+x}{1+\sqrt{x}}$$

Factorizamos:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{2\,(1+\sqrt{x})+x}{1+\sqrt{x}}$$

Como $x=1+\sqrt{x}$, entonces sustituimos en la expresión anterior:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{2(x)+x}{x}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{3\,\not{x}}{\not{x}}=3$$

Por lo tanto: $x+\dfrac{1}{x}=3$

Problemas a resolver

Resuelve los siguientes ejercicios escribiendo con todo detalle cada paso de tu solución.

1. Encuentra el último dígito de $9^{2008} \times 16^{2009}$.

(a) 1 (b) 4 (c) 6
(d) 8 (e) 9

2. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión?

$$51\left(\frac{50^2}{50^2-1}\right)\left(\frac{49^2}{49^2-1}\right)\left(\frac{48^2}{48^2-1}\right)\cdots\left(\frac{3^2}{3^2-1}\right)\left(\frac{2^2}{2^2-1}\right)$$

(a) 100 (b) 120 (c) 140
(d) 160 (e) 180

3. Supón que $[x,y,z] = \dfrac{x-z}{y-z}$. Si $[x,z,y] = -5$, ¿cuál es el valor de $[x,y,z]$?

(a) -4 (b) -5 (c) 6
(d) 4 (e) 7

4. Jacinta calcula correctamente el valor de $5^{2009} \times 8^{669}$.¿Cuántos dígitos contiene su respuesta?

(a) 669 (b) 2008 (c) 2010
(d) 2007 (e) 2009

5. El promedio de una serie de 64 números es 64. Si el promedio de los primeros 36 números es 36, ¿cuál es el promedio de los 28 números restantes?

(a) 28 (b) 72 (c) 44
(d) 108 (e) 100

6. En un número de 7 dígitos, cada grupo de cuatro dígitos adyacentes suman 16 y cada grupo de 5 dígitos adyacentes suman 19. ¿Cuál es la suma de los siete dígitos del número?

(a) 21 (b) 35 (c) 28
(d) 25 (e) 32

7. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide al número $1023^2 - 1$?

(a) 2^9 (b) 2^{10} (c) 2^{11}
(d) 2^{12} (e) 2^8

8. En la multiplicación mostrada abajo, cada una de las letras representa a un dígito diferente. ¿A qué letra le corresponde el valor de 3?

```
  A 6 B C
x       7
---------
D 9 E 9 8
```

(a) A (b) B (c) C
(d) D (e) E

9. María Fernanda calcula el valor de $1^{2009} + 3^{2009} + 5^{2009} + 7^{2009} + 9^{2009}$ usando una computadora muy avanzada. ¿Cuál es el dígito de las unidades de la respuesta que obtuvo?

(a) 3 (b) 4 (c) 5
(d) 6 (e) 7

10. Si a, b, c, son números reales positivos, tales que $ab = c$, $bc = 12$, $b = 3c$; ¿cuánto vale abc?

(a) 1 (b) 4 (c) 8
(d) 10 (e) 12

11. Si efectuamos el producto de todos los números impares comprendidos entre 1 y 2009, ¿cuál es la cifra de las unidades del número obtenido?

(a) 1 (b) 3 (c) 5
(d) 7 (e) 9

12. Observa los productos siguientes:

$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$
$$12345679 \times 54 = 666666666$$

¿Por qué número debemos multiplicar a 12345679 para obtener 999999999?

(a) 29 (b) 99 (c) 72
(d) 41 (e) 81

13. El promedio de las edades de un grupo formado por abogados e ingenieros es de 40 años. Si los segundos promedian 35 años y los primeros 50, ¿cuál es la razón del número de ingenieros al número de abogados?

(a) 3 : 2 (b) 3 : 1 (c) 1 : 2
(d) 2 : 3 (e) 2 : 1

14. ¿Cuál es el menor número primo que divide a la suma $3^{11} + 5^{13}$?

(a) 2 (b) $3^{11} + 5^{13}$ (c) 5
(d) 3 (e) 13

15. 28 estudiantes de un colegio toman por lo menos una materia. El número que toman sólo Matemáticas e Inglés es igual al que sólo toman Matemáticas. No hay estudiantes que únicamente tomen Inglés o Historia, y seis seleccionan Matemáticas e Historia, pero no Inglés. El número de estudiantes que sólo toman Inglés e Historia es cinco veces el número de los que toman las tres materias. Si el número de estudiantes que toman las tres materias es par y diferente de cero. ¿Cuántos sólo toman Inglés y Matemáticas?

(a) 5 (b) 6 (c) 7
(d) 8 (e) 9

16. La suma de los dígitos del número $\left(10^{2009} + 1\right)^2$ es:

(a) 1 (b) 2 (c) 3
(d) 4 (e) 5

17. Si *QUÉ ES* es *ASÍ* cuando *QUIÉN ES* es *ES* y el *ASÍ y ASÍ* es *ES*×*ASÍ*, ¿qué es el *QUIÉN ES*×*QUÉ ES* cuando el *QUIÉN ES* es *ASÍ*, el *ASÍ y ASÍ* es *ASÍ*×*ASÍ* y el *ES* es dos? (*QUÉ ES*, *QUIÉN ES*, *ES* y *ASÍ* son variables consideradas positivas)

(a) *QUIÉN ES* (b) *QUIÉN ES* (c) *ES*
(d) *ASÍ* (e) *ASÍ y ASÍ*

18. El número n es un cuadrado perfecto. El siguiente cuadrado perfecto es:

(a) $n+\sqrt{n}$ (b) n^2+1 (c) n^2+2n+1
(d) $n+2\sqrt{n}+1$ (e) n^2+n

19. Si $x+\frac{1}{x}=8$, ¿cuál es el valor de $x^4+\frac{1}{x^4}$?

(a) 8^4 (b) 8^4+2 (c) 8^4-2^8+2
(d) 8^4+2^8-2 (e) 8^4+2^8

20. Si $2^x=3$, entonces el valor de 4^{2x} es:

(a) 3 (b) 9 (c) 12
(d) 81 (e) 6561

21. Si a y b son números reales, tal que $a-b=ab=\frac{a}{b}$, ¿cuál es el valor de $a+b$?

(a) $-\frac{3}{2}$ (b) -1 (c) $-\frac{1}{2}$
(d) 8 (e) 16

22. Encuentra la suma de los coeficientes en la expansión de la expresión siguiente:

$$\left(\frac{1}{2}-4x+4x^3\right)^{274}\left(6x^4-6x+2\right)^{275}$$

(a) -1 (b) 0 (c) 2
(d) 549 (e) 2746

23. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres dígitos que pueden formarse usando tres dígitos diferentes escogidos entre 1, 2, 3, 4 y 5?

(a) 1080 (b) 1180 (c) 19980
(d) 20180 (e) 21080

24. Halla el menor valor posible de la expresión $x^2+y^2+10x+20y+30$.

www.elsolucionario.net

(a) -155 (b) -105 (c) -95
(d) -30 (e) 0

25. Si $a+b=19$ y $a^2+b^2=181$, ¿cuál es el valor de ab?

(a) 70 (b) 78 (c) 84
(d) 88 (e) 90

26. La diferencia entre las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$, es la misma que la diferencia entre las raíces de $x^2+qx+p=0$, donde $p \neq q$. Entonces, ¿a qué equivale $p+q=$?

(a) -4 (b) -1 (c) -2
(d) 0 (e) 2

27. ¿Para cuántos valores enteros de n, la fracción $\dfrac{n+13}{n-4}$ es un entero?

(a) 0 (b) 1 (c) 2
(d) 3 (e) 4

28. Si α y β son las soluciones de la ecuación $2x^2-x-2=0$. Encuentra el valor de $2\alpha+2\beta+(\alpha\beta)^{2009}$.

(a) 0 (b) 1 (c) 2
(d) -1 (e) -2

29. Si $x+\dfrac{1}{x}=3$ con $x>1$, ¿cuál es el valor de $x^3+\dfrac{1}{x^3}$?

(a) $8\sqrt{5}$ (b) $5\sqrt{2}$ (c) 27
(d) 18 (e) 9

30. Obtén el valor de $(2x-1)^2$, si x está dada por la relación:

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

(a) 1 (b) 5 (c) −2
(d) 7 (e) 3

31. La suma de las raíces de la ecuación $4x^2 + 5 - 8x = 0$, es igual a:

(a) 8 (b) −5 (c) $-\frac{5}{4}$
(d) −2 (e) 2

32. Encuentra el resultado de la siguiente operación:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2009}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2009}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)$$

(a) $-\frac{1}{2009}$ (b) $\frac{1}{2009}$ (c) $\frac{2}{2009}$
(d) $\frac{1}{2008}$ (e) $-\frac{1}{2008}$

33. Si $1 + x + x^2 + x^3 = 0$, ¿cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots x^{2007} + x^{2008}$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2
(d) 3 (e) 4

34. Si $a + b + c = 0$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 27$, ¿cuál es el valor de abc?:

(a) −3 (b) 0 (c) 3
(d) $3\sqrt[3]{9}$ (e) 9

35. ¿A qué es equivalente la suma que a continuación se presenta?

$$11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11} + 11^{11}$$

(a) 121^{11} (b) 11^{121} (c) 11^{12}
(d) 121^{121} (e) $11^{11^{11}}$

36. ¿Cuántos ceros tiene el resultado de esta operación?

$$\left(10^{10} + 10^{11} + 10^{12} + \cdots + 10^{2009}\right)^{2010}$$

(a) 2010 (b) 2009 (c) 20100
(d) 10 (e) 4038090

37. Supón que $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + n(-1)^{n-1}$ con $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuál es el valor de $S_{2009} + S_{2010}$?

(a) 0 (b) 1 (c) -1
(d) 1005 (e) -1005

38. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\left(x^2 + 4x + 5\right)^{x^2+1} = 1$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2
(d) 3 (e) 4

Unidad 3

Solución creativa de problemas geométricos

¿Hacia dónde vamos?

En el nivel **atender**, el alumno:

- Identificará técnicas de resolución a problemas geométricos.

En el nivel **entender**, el alumno:

- Concebirá diferentes soluciones a problemas geométricos.

En el nivel **juzgar**, el alumno:

- Resolverá de diferentes formas problemas geométricos.
- Comparará las distintas soluciones de un problema geométricos.
- Relacionará la creatividad con la solución de problemas geométricos.

En el nivel **valorar**, el alumno:

- Solucionará en forma creativa problemas geométricos.
- Deliberará la importancia de resolver en forma creativa problemas geométricos para el desarrollo del razonamiento matemático.

3.1. Solución creativa de problemas geométricos

Niveles de Operación de la Actividad Consciente Intencional

Para la inteligencia	Para la reflexión	Para la deliberación
¿Qué es una solución creativa de un problema geométrico?	*¿Cómo se reconoce una solución creativa de un problema geométrico?*	*¿Para qué sirve resolver problemas de manera creativa?*

Como pudiste experimentar en las unidades anteriores, el primer paso para resolver un problema es reunir información, explorar, entender, relacionar, conjeturar y analizar. Al solucionar cuestiones de tipo geométrico nos enfrentaremos, sin lugar a dudas, a nuevos retos y experiencias de aprendizaje. El llamado es a que uses tu imaginación y creatividad.

Actividad 3.1.

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

CD1 CD2 CD3 CD4 CD8

Resuelve los siguientes problemas en equipo y expón tus soluciones ante el grupo.

Ejemplo 3.1. *Un círculo con área 4π es inscrito en un triángulo rectángulo de área 24. Obtén el perímetro del triángulo.*

Solución

Trazamos la figura que ilustre el problema. Observa la figura 3.1. Formamos los triángulos AOB, BOC y COA, como se aprecia en la figura 3.2.

Como el área del triángulo rectángulo es 24, podemos establecer la siguiente igualdad, utilizando los triángulos formados:

$$\text{Área}\Delta ABC = 24 = \text{Área}\Delta AOB + \text{Área}\Delta BOC + \text{Área}\Delta COA$$

$$24 = \frac{1}{2}\left(\overline{AB}\right)r + \frac{1}{2}\left(\overline{BC}\right)r + \frac{1}{2}\left(\overline{AC}\right)r \quad \text{o} \quad 24 = \frac{1}{2}r\left[\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\right]$$

De aquí obtenemos: $\frac{48}{r} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$

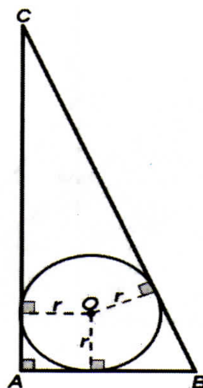


Figura 3.1: Problema 3.1.

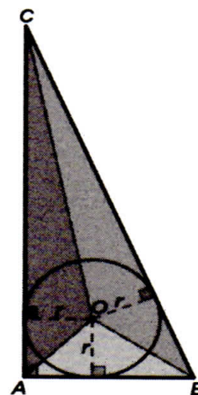


Figura 3.2: Problema 3.1.

Como el área del círculo es 4π, entonces se tiene que $4\pi = \pi r^2$ y, a partir de ello, se deduce que $r = 2$.

Al sustituir $r = 2$ en la expresión siguiente: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \frac{48}{r}$

Obtenemos el perímetro del triángulo rectángulo: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \frac{48}{2} = 24$

Ejemplo 3.2. *En el triángulo ABC, $AB = 3$, $BC = 4$ y $\angle ABC = 90^0$. Un punto Q se encuentra en el segmento AC. Sea P un punto fuera del triángulo ABC, tal que el segmento PQ es paralelo a AB y $PQ = 1$. Obtén el área del triángulo APC.*

Solución

En la figura 3.3 se aprecia el dibujo que representa al problema:

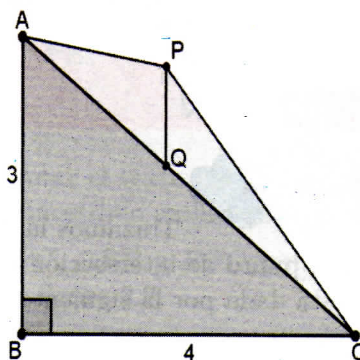


Figura 3.3: Problema 3.2.

Trazamos la recta L paralela al segmento AB y que pase a través de los puntos P y Q. Observa la figura 3.4:

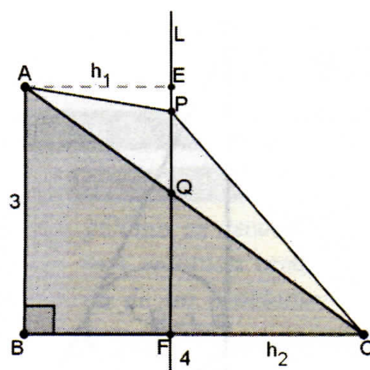


Figura 3.4: Problema 3.2.

Consideremos los triángulos APQ y CPQ en la figura 3.4 y tracemos las alturas h_1 y h_2, respectivamente.

Al ver los triángulos APQ y CPQ, se pueden establecer las siguientes expresiones:

$$\text{Área}\Delta APC = \text{Área } \Delta APQ + \text{Área}\Delta CPQ = \frac{(PQ)h_1}{2} + \frac{(PQ)h_2}{2}$$

Factorizando se tiene: $\text{Área}\Delta APC = \left(\frac{PQ}{2}\right)(h_1 + h_2)$

Como $PQ = 1$ y $BC = 4 = h_1 + h_2$, entonces se deduce que:

$$\text{Área}\Delta APC = \left(\frac{PQ}{2}\right)(h_1 + h_2) = \left(\frac{1}{2}\right)(4) = 2$$

Por lo tanto: $\text{Área}\Delta APC = 2u^2$

Ejemplo 3.3. *Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son* 5, 12 *y* 13*. La bisectriz del mayor ángulo agudo divide al triángulo en dos más con áreas* P *y* Q*, donde* $P < Q$*. ¿Cuál es el valor de* $\frac{P}{Q}$*?*

Solución

Trazamos la figura que ilustre al problema, ver la figura 3.5. Sea R el punto de intersección de la bisectriz del ángulo B y el lado AC. El área de P está dada por la siguiente expresión:

$$P = \text{Área}\Delta ABR = \frac{1}{2}(AR)(AB) = \frac{1}{2}(AR)(5)$$

Por otra parte, el área Q está definida por:

$$Q = \text{Área}\Delta CRB = \frac{1}{2}(CR)(AB) = \frac{1}{2}(CR)(5)$$

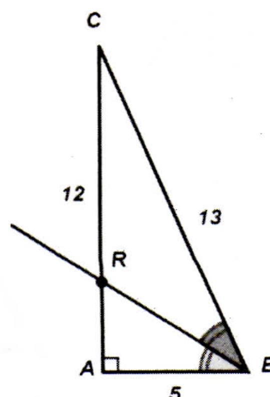


Figura 3.5: Triángulo rectángulo.

Luego entonces, se tiene que: $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\frac{1}{2}(AR)(5)}{\frac{1}{2}(CR)(5)} = \dfrac{AR}{CR}$

Es decir: $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{AR}{CR}$

Al aplicar el teorema de la bisectriz al triángulo ABC mostrado en la figura 3.5, se establecen las siguientes proporciones:

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{CR} \quad \text{o bien} \quad \frac{5}{AR} = \frac{13}{CR}$$

Y de aquí obtenemos: $\dfrac{5}{13} = \dfrac{AR}{CR}$. Por lo tanto: $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{5}{13}$

Ejemplo 3.4. *En un triángulo equilátero ABC de lado 2, se escoge un punto cualquiera P en el interior del triángulo. A partir del punto P se trazan segmentos perpendiculares PH, PF y PE a los lados AB, BC y AC, respectivamente. Encuentra el valor de la suma $\overline{PH} + \overline{PF} + \overline{PE}$.*

Solución

Al interpretar el texto del problema, trazamos la figura que lo ilustre. Observa el triángulo mostrado en la figura3.6.

Dibujamos los triángulos APC, APB y BPC, así como la altura h del triángulo ABC trazada desde C. Ve la figura 3.7.

Al observar la figura, se pueden establecer las igualdades que a continuación se muestran:

$$\text{Área } \Delta ABC = \text{ Área } \Delta APC + \text{ Área } \Delta APB + \text{ Área } \Delta BPC$$

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{(\overline{AC})\,(\overline{PE})}{2} + \frac{(\overline{AB})\,(\overline{PH})}{2} + \frac{(\overline{BC})\,(\overline{PF})}{2}$$

www.elsolucionario.net

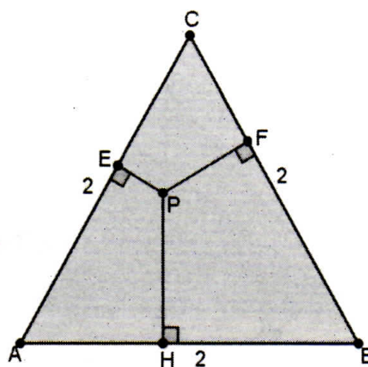


Figura 3.6: Triángulo equilátero ABC.

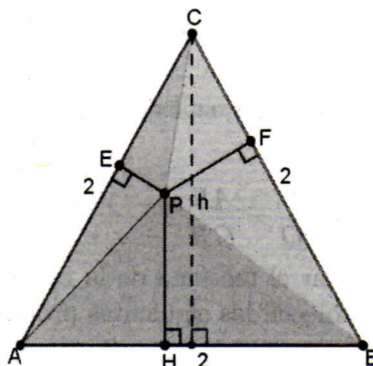


Figura 3.7: Triángulos APC, APB y BPC.

Como el triángulo ABC es equilátero, entonces $AB = AC = BC = 2$. Usando estas igualdades, establecemos lo siguiente:

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{(\not{2})\left(\overline{PE}\right)}{\not{2}} + \frac{(\not{2})\left(\overline{PH}\right)}{\not{2}} + \frac{(\not{2})\left(\overline{PF}\right)}{\not{2}}$$

$$\text{Área } \Delta ABC = \overline{PE} + \overline{PH} + \overline{PF} \qquad (1)$$

La igualdad mostrada en seguida, se obtiene al analizar el triángulo ABC de la figura 3.7.

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{\overline{AB}h}{2} = \frac{2h}{2} = h \qquad (2)$$

Por transitividad de las igualdades (1) y (2), se deduce que: $h = \overline{PE} + \overline{PH} + \overline{PF}$ *Es decir, basta con encontrar la altura del triángulo equilátero* ABC *para obtener* la suma $\overline{PH} + \overline{PF} + \overline{PE}$.

Por el teorema de Pitágoras: $2^2 = 1^2 + h^2$. De donde obtenemos que: $h = \sqrt{3}$
En consecuencia:

$$\overline{PE} + \overline{PH} + \overline{PF} = \sqrt{3}$$

Ejemplo 3.5. *Si el área de un triángulo rectángulo isósceles es de 100 unidades cuadradas. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa del triángulo?*

Solución

En la figura 3.8 se muestra el triángulo ABC que ilustra el problema.

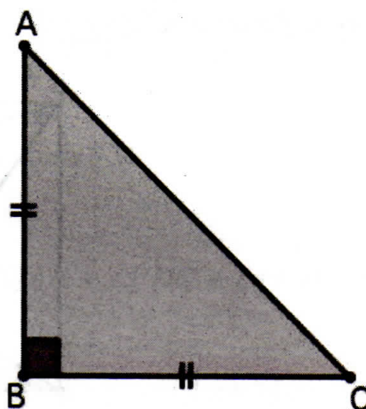


Figura 3.8: Triángulo rectángulo isósceles ABC.

Como el área del triángulo es 100, entonces se establece la siguiente expresión:

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = 100$$

Dado que $\overline{AB} = \overline{BC}$ por ser un triángulo isósceles, entonces:

$$\text{Área } \Delta ABC = \frac{\overline{AB}^2}{2} = 100$$

De donde obtenemos: $\dfrac{\overline{AB}^2}{2} = 100$, por lo tanto: $\overline{AB}^2 = 200$

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles ABC, obtenemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AB}^2$$

Como $\overline{AB}^2 = 200$, al sustituir se obtiene:

$$\overline{AC}^2 = 2(200) = 400 \quad \text{por lo tanto:} \quad \overline{AC} = \sqrt{400} = 20$$

Entonces, la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles es 20.

Ejemplo 3.6. *En el cuadrado $ABCD$ escogemos un punto P sobre el lado $\overline{AB}$, tal que $AP = 2PB$; sobre el lado $\overline{BC}$ elegimos un punto Q, tal que $BQ = 2CQ$. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos $\angle QAB$, $\angle PDQ$ y $\angle PCB$?*

Solución

Como resultado de la adecuada interpretación del problema, se obtiene la figura 3.9.

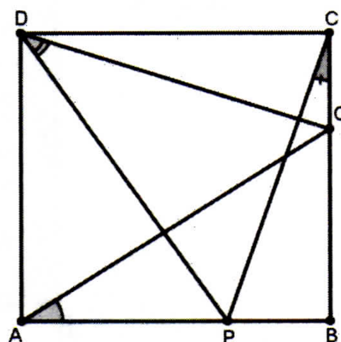


Figura 3.9: Ejemplo 3.6.

Como $ABCD$ es un cuadrado, entonces $AB = BC$ y de aquí que $PB = CQ$. Por el teorema **L-A-L**, los triángulos CBP y DCQ son congruentes, y aquí se infiere que $\angle PCB \cong \angle QDC$. Observa la figura 3.10:

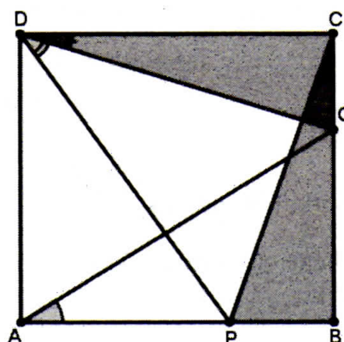


Figura 3.10: $\Delta CBP \cong \Delta DCQ$.

Como $AB = BC$, también se cumple la igualdad $AP = BQ$. Por el teorema **L-A-L**, los triángulos ADP y BAQ son congruentes, y se deduce que $\angle QAB \cong \angle PDA$. Ovserva la figura 3.11, de aquí se obtiene la siguiente relación.

$$\angle QAB + \angle PDQ + \angle PCB = \angle PDA + \angle PDQ + \angle QDC$$

Como $\angle PDA + \angle PDQ + \angle QDC = 90^0$, finalmente logramos la suma buscada:

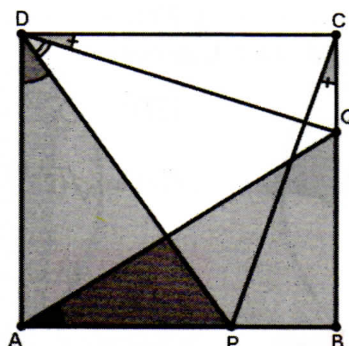


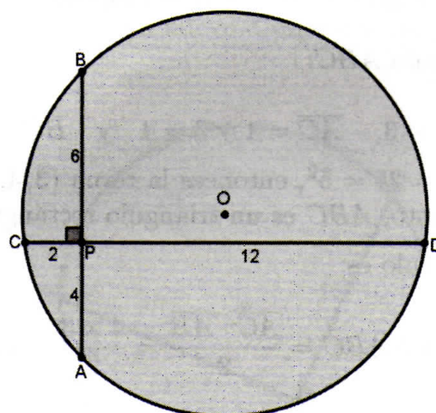
Figura 3.11: $\Delta ADP \cong \Delta BAQ$.

$$\angle QAB + \angle PDQ + \angle PCB = 90^0$$

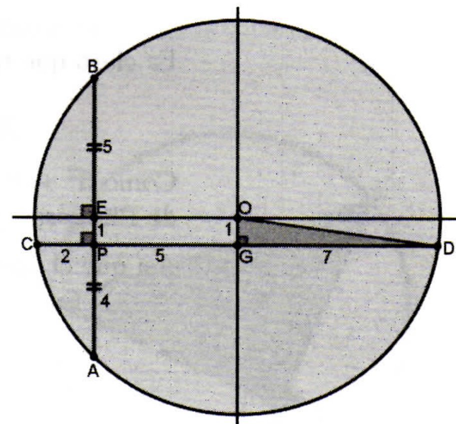
Ejemplo 3.7. *Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas de un círculo que se intersectan en un punto P. Supón que $AP = 4$, $PB = 6$, $CP = 2$, $PD = 12$ y $\angle BPC = 90^0$. ¿Cuál es el radio del círculo?*

Solución

En la figura 3.12(a) se ilustra el dibujo que representa las condiciones del problema.



(a) Interpretación del problema.



(b) Construcción auxiliar.

Figura 3.12: Problema 3.7.

Realizamos una construcción auxiliar: Trazamos dos rectas que pasen por el centro O del círculo y que sean perpendiculares a las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Observa la figura 3.12(b).

Por teorema, las rectas trazadas bisecan a las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en los puntos E y G, respectivamente. Como $\overline{AB} = 10$ y $\overline{CD} = 14$, entonces $\overline{GD} = 7$ y $\overline{EP} = 1$.

Dado que $\overline{EO} \parallel \overline{PG}$, entonces $\overline{OG} = 1$. Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo OGD, se obtiene:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OG}^2 + \overline{GD}^2 = 1^2 + 7^2 = 50 = (25)(2)$$

Por lo tanto, $r = \overline{OD} = \sqrt{(25)(2)} = 5\sqrt{2}$.

Ejemplo 3.8. *Si tres círculos de radios 1, 2 y 3 son tangentes entre sí externamente, ¿cuál es el área del triángulo formado al unir mediante segmentos los centros de los círculos?*

Solución

Hacemos el dibujo que representa las condiciones del problema. Observa la figura 3.13.

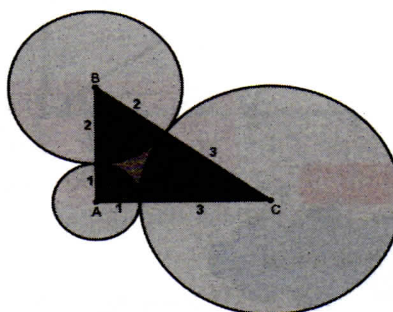


Figura 3.13: Círculos tangentes.

Es claro que en el triángulo ABC:

$$\overline{AB} = 1 + 2 = 3, \quad \overline{AC} = 1 + 3 = 4 \quad \text{y} \quad \overline{BC} = 2 + 3 = 5$$

Como $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, entonces la terna $(3, 4, 5)$ satisface el teorema de Pitágoras y, por lo tanto, ABC es un triángulo rectángulo con $\angle BAC = 90^0$.

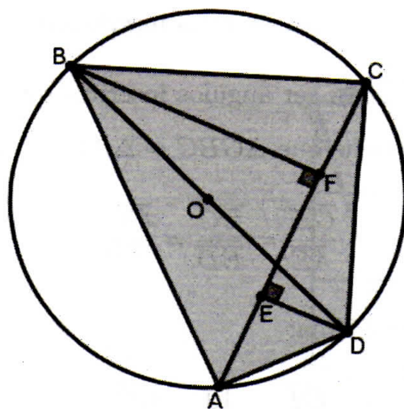
Así que el área del triángulo es:

$$\text{Área}\Delta ABC = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6u^2$$

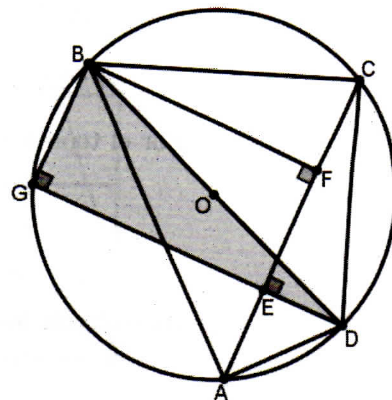
Ejemplo 3.9. *Un cuadrilátero $ABCD$ puede ser inscrito en un círculo, de tal manera que $\overline{BD}$ es el diámetro del círculo. Sea E un punto en $\overline{AC}$, tal que $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ son perpendiculares. Si $AE = 6$, $EC = 10$ y $DE = 5$, encuentra la distancia perpendicular desde B a la cuerda $\overline{AC}$.*

Solución

En el dibujo 3.14(a) se aprecia el esquema que representa las condiciones del problema.



(a) $ABCD$ está inscrito en el círculo.



(b) Construcción auxiliar.

Figura 3.14: Problema 3.9.

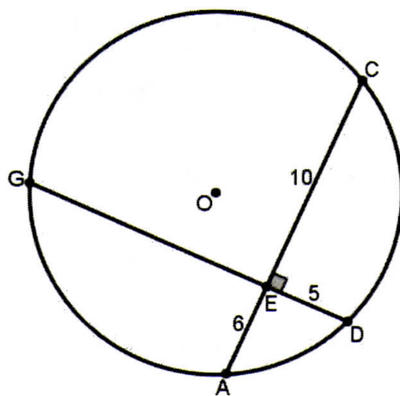
Realizamos la siguiente construcción auxiliar: Prolongamos el segmento DE a través de E hasta intersectar la circunferencia en el punto G. Observa la figura 3.14(b).

Como el $\angle BGD$ es un ángulo inscrito, entonces: $\angle BGD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

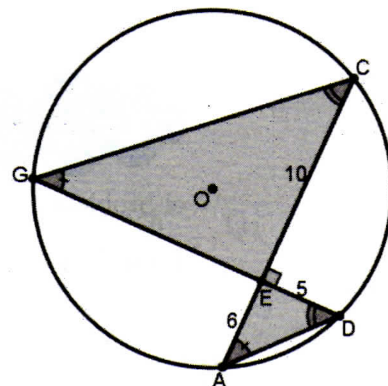
$$\angle BGD = \frac{1}{2}(180^0) = 90^0$$

Dado que $\angle BGD = 90^0$, entonces $GEFB$ es un rectángulo y de aquí se deduce que $GE = BF$, es decir, calcular BF es equivalente a hacerlo con GE.

Hacemos un nuevo dibujo que involucre los datos del problema. Observa la figura 3.15(a).



(a) $AE = 6$, $EC = 10$, $ED = 5$ y $GE =$?



(b) $\Delta GEC \sim \Delta AED$.

Figura 3.15: Problema 3.9.

Si unimos los puntos G con C y A con D, se tiene lo siguiente. Observa la figura 3.15(b).

$\angle GCA \cong \angle GDA$ Por ser ángulos inscritos que sustentan el mismo arco.

$\angle CGD \cong \angle GAD$ Por ser ángulos inscritos que sustentan el mismo arco.

Por el teorema **A-A-A**, se tiene que $\Delta GEC \sim \Delta AED$, y con ello:

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{AD}}$$

Al sustituir los datos del problema:

$$\frac{\overline{GE}}{6} = \frac{10}{5} = \frac{\overline{GC}}{\overline{AD}}$$

De la fracción $\dfrac{\overline{GE}}{6} = \dfrac{10}{5}$ obtenemos que $GE = 12$, y finalmente: $GE = BF = 12$

Ejemplo 3.10. *Tres cuadrados idénticos son colocados lado con lado, como se muestra en la figura 3.16. Dos líneas son dibujadas de O hasta A y de O a B. Encuentra el valor de la siguiente suma:*

$$\angle AOC + \angle BOC$$

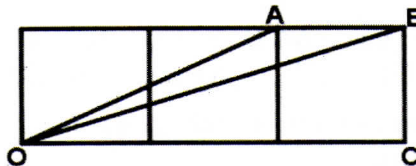


Figura 3.16: Problema 3.10.

Solución La construcción mostrada en la figura 3.17 ayudará a resolver el problema.

En la figura 3.17, observa que: $\angle AOC = \angle NBR$ (1)

$$\angle BOC = \angle RBL \qquad (2)$$

Como BM es la diagonal del cuadrado $OBLM$, entonces: $\angle NBR + \angle RBL = 45^0$

Al sustituir las igualdades (1) y (2), obtenemos el resultado de la suma:

$$\angle AOC + \angle BOC = 45^0$$

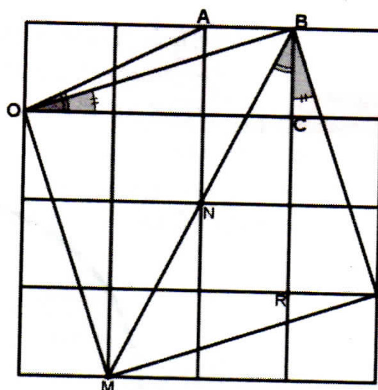


Figura 3.17: Problema 3.10.

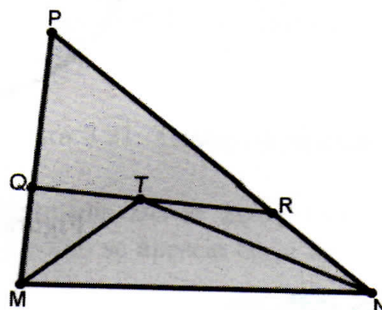


Figura 3.18: Problema 3.11.

Ejemplo 3.11. *¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR mostrado en la figura 3.18, si $PM = 10$, $MN = 15$, $PN = 17$, $QM = QT$ y $RN = RT$?*

Solución

Al examinar la figura 3.18, se puede establecer que:
Perímetro $\Delta PQR = PQ + QR + PR$

$$\text{Perímetro } \Delta PQR = PQ + QT + RT + PR \qquad (1)$$

Como $QM = QT$ y $RN = RT$, si sustituimos en la expresión (1) conseguimos:

$$\text{Perímetro } \Delta PQR = PQ + QM + RN + PR$$

Asociamos: Perímetro $\Delta PQR = (PQ + QM) + (RN + PR)$

De la figura 3.18, se tiene que $PQ + QM = PM$ y $RN + PR = PN$. Usando este hecho, se tiene que: Perímetro $\Delta PQR = PM + PN$

Al sustituir $PM = 10$ y $PN = 17$, obtenemos el resultado:

$$\text{Perímetro } \Delta PQR = 10 + 17 = 27$$

Ejemplo 3.12. *En la figura 3.19, supón que AB es un diámetro del círculo, BC es tangente, $\angle BAC = 30^0$ y $CD = \sqrt{3}$. ¿Cuál es la distancia de A hasta B?*

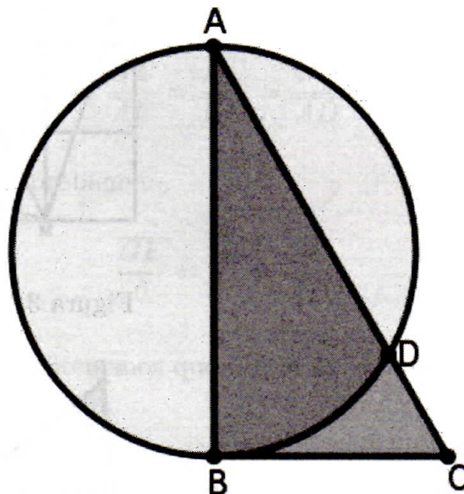
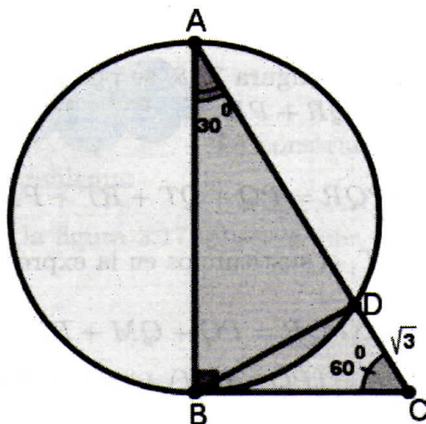


Figura 3.19: Problema 3.12.

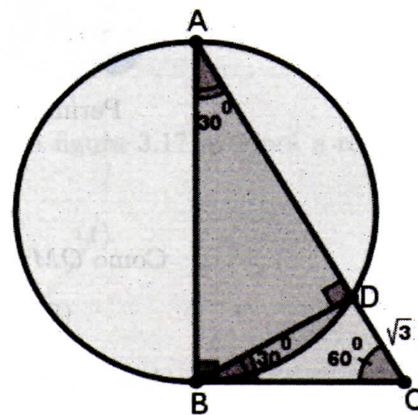
Solución

Por teorema, si AB es un diámetro y BC es tangente en B, entonces $AB \perp BC$ y ABC es un triángulo rectángulo.

Como $\angle ABC = 90^0$ y $\angle BAC = 30^0$, entonces $\angle ACB = 60^0$. Podemos usar como construcción auxiliar, el trazo del segmento BD y plasmar la información recabada en un nuevo dibujo. Examina la figura 3.20(a):



(a) Información del problema 3.12.



(b) Construcción auxiliar.

Figura 3.20: Problema 3.12.

En la figura 3.20(a) se aprecia que $\angle BAD$ y $\angle DBC$ son ángulos inscritos y

seminscritos que sustentan el mismo arco BD, por consiguiente: $\angle BAD = \angle DBC = 30^0$.

Así que BDC es un triángulo $30^0 - 60^0 - 90^0$. Observa la figura 3.20(b). El triángulo BDC tiene algo especial: es la mitad de un triángulo equilátero, es decir, si copiamos otro de ellos que sea congruente, como se ve en la figura 3.21, cada uno de los lados del equilátero tendrá una longitud de $2\sqrt{3}$:

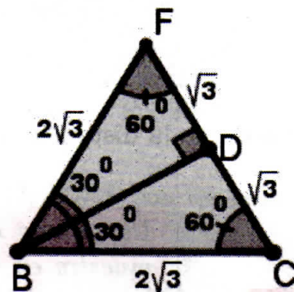
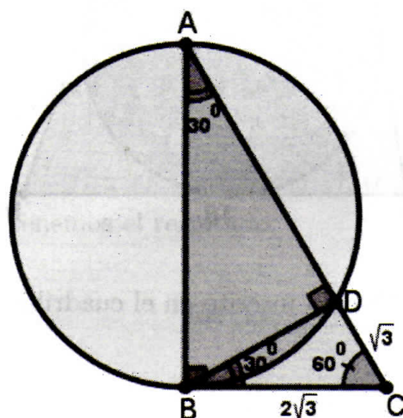
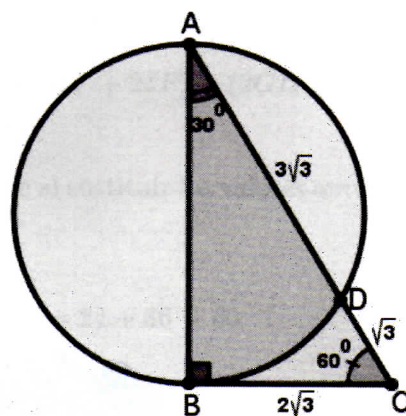


Figura 3.21: Triángulo equilátero.

En la figura 3.21 es evidente que $BC = 2\sqrt{3}$. Ahora bien, con este nuevo dato hacemos otro dibujo, tal y como se aprecia en la figura 3.22(a).



(a) Información del problema 3.12.



(b) ABC es un triángulo $30^0 - 60^0 - 90^0$.

Figura 3.22: Problema 3.12.

Si borramos el segmento BD de la figura 3.22(a), es claro que ABC es un triángulo $30^0 - 60^0 - 90^0$, es decir, también es la mitad de un triángulo equilátero; por lo tanto, $BC = \frac{AC}{2}$. De aquí deducimos que $AC = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$. Aprecia la figura 3.22(b).

Finalmente, al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC, se tiene que:

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + AB^2$$

$$AB^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2$$

$$AB^2 = 16 \cdot 3 - 4 \cdot 3$$

$$AB^2 = 48 - 12 = 36$$

$$AB = \sqrt{36} = 6$$

Concluimos que la distancia del punto A al B, es 6.

Ejemplo 3.13. *Un círculo es inscrito en un cuadrilátero $GHIJ$, como se muestra en la figura 3.23, con $JI = 12$ y $GH = 18$. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero?*

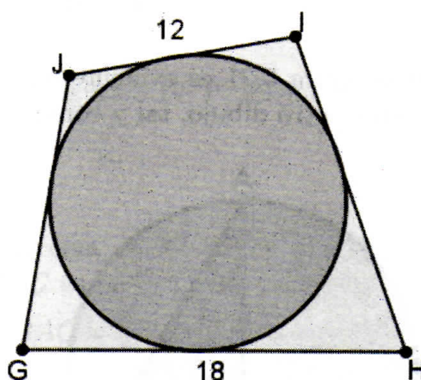


Figura 3.23: Círculo inscrito en el cuadrilátero $GHIJ$.

Solución

Denotemos con C, D, E y F a los puntos de tangencia del círculo y los lados del cuadrilátero $ABCD$. Ve la figura 3.24.
El perímetro del cuadrilátero $GHIJ$ se puede calcular con la suma:

$$\text{Perímetro } GHIJ = JC + CG + GD + DH + HE + IE + IF + JF \quad (1)$$

Recordemos el siguiente teorema: «Las tangentes trazadas desde un mismo punto exterior a una circunferencia son congruentes.»

Al usar este teorema para los puntos exteriores G, H, I y J se obtienen las siguientes igualdades. Ver la figura 3.24:

$$JC = JF, \quad CG = GD, \quad HE = DH \quad \text{y} \quad IE = IF$$

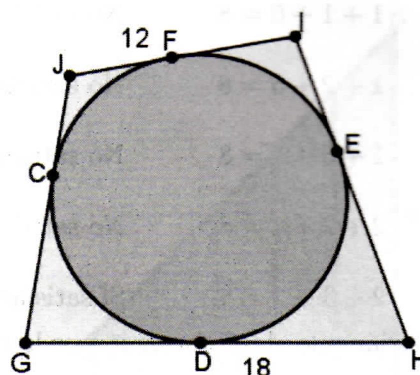


Figura 3.24: C, D, E y F son los puntos de tangencia.

Al sustituir estas expresiones en la igualdad (1), se tiene que:

$$\text{Perímetro } GHIJ = JF + GD + GD + DH + DH + IF + IF + JF$$

Simplificamos: Perímetro $GHIJ = 2JF + 2GD + 2DH + 2IF$

Agrupamos y factorizamos: Perímetro $GHIJ = (2JF + 2IF) + (2GD + 2DH) = 2(JF + IF) + 2(GD + DH)$

Como $JF+IF = 12$ y $GD+DH = 18$, finalmente al sustituir los valores anteriores, obtenemos el resultado:

$$\text{Perímetro } GHIJ = 2(12) + 2(18) = 24 + 36 = 60$$

Ejemplo 3.14. *Si un triángulo, cuyos lados son de longitud entera, tiene perímetro 8, ¿cuál es el área del triángulo?*

Solución

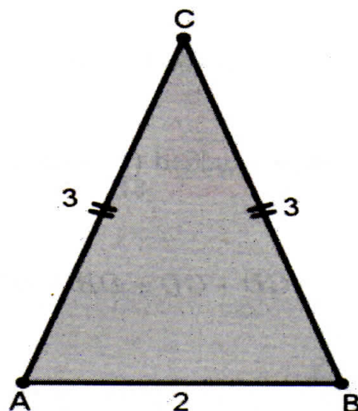
Como las longitudes de los lados del triángulo es un número entero, debemos encontrar todas las ternas de números (a, b, c), tal que se cumpla la *desigualdad del triángulo* y sea válida la siguiente relación: $a + b + c = 8$

Cabe aclarar que la terna $(1, 2, 5) = (2, 1, 5)$, es decir, el orden de la terna no importa.

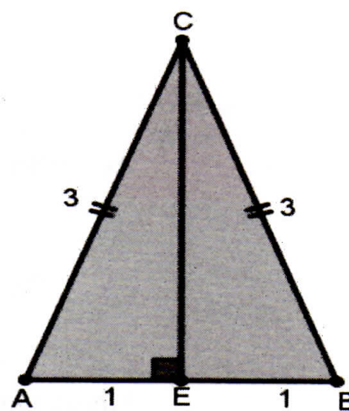
Las ternas que satisfacen la relación $a + b + c = 8$, son:

$1+1+6=8$	No satisface la desigualdad triangular.
$1+2+5=8$	No satisface la desigualdad triangular.
$1+3+4=8$	No satisface la desigualdad triangular.
$2+2+4=8$	No satisface la desigualdad triangular.
$2+3+3=8$	Sí satisface la desigualdad triangular.

El triángulo ABC formado por la terna $(2, 3, 3)$ se aprecia en la figura 3.25(a):



(a) Triángulo formado por la terna $(2, 3, 3)$.



(b) CE es la altura del triángulo.

Figura 3.25: Problema 3.14.

Como ABC es un triángulo isósceles, trazamos la altura CE, como se muestra en la figura 3.25(b), y formamos dos triángulos rectángulos congruentes.

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo AEC, se tiene:

$$3^2 = 1^2 + \overline{CE}^2 \quad \text{o bien} \quad \overline{CE}^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8 = (4)(2)$$

$$\overline{CE} = \sqrt{(4)(2)} = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el área del triángulo cuyos lados son de longitud entera y perímetro 8, es:

$$\text{Área}\Delta ABC = \frac{(\not{2})(2\sqrt{2})}{\not{2}} = 2\sqrt{2}u^2$$

Ejemplo 3.15. *El lado AB del triángulo rectángulo ABC es dividido en 6 partes iguales por los puntos D, E, F, G y H, como se aprecia en la figura 3.26. A partir de estos puntos son dibujados 5 segmentos paralelos al lado BC del triángulo. ¿Cuál es la suma de las longitudes de estos 5 segmentos?*

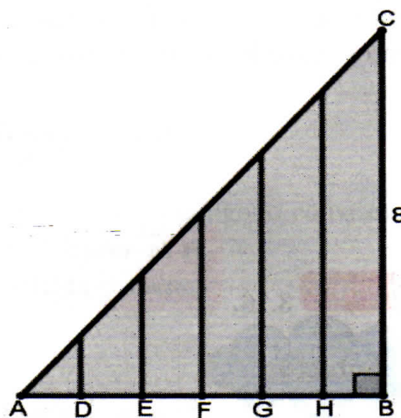


Figura 3.26: Problema 3.15.

Solución

La siguiente construcción auxiliar ayudará a resolver el problema: prolongamos los 5 segmentos paralelos al lado BC, hasta formar el rectángulo $ABCN$. Ve la figura 3.27:

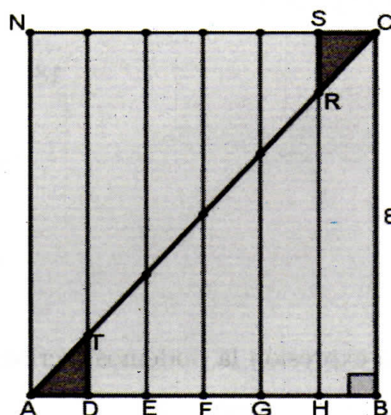


Figura 3.27: Construcción auxiliar.

Si prestamos atención a la figura 3.27, los triángulos ATD y SRC son congruentes, ya que:

$\angle ADT \cong \angle CSR = 90^0$	Por ser ángulos rectos.
$\angle TAD \cong \angle SCR$	Por ser alternos internos.
$AD = SC$	Por construcción.

Esto significa que $SR = TD$ y, por lo tanto, $SR + RH = 8$.

Siguiendo un razonamiento análogo, podemos concluir que la suma de los 5 segmentos paralelos a BC, mostrados en la figura 3.26, es:

$$\text{Suma de los 5 segmentos} = \frac{(8)(5)}{2} = 20.$$

Ejemplo 3.16. ***Si la suma de todos los ángulos, excepto uno en un polígono convexo, es 2190^0, ¿cuál es el número de lados del polígono?***

Solución

Si n es el número de lados del polígono convexo y S_n es la suma de todos sus ángulos, entonces:

$$S_n = 180(n-2)$$

Según las condiciones del problema, establecemos que:

$$180(n-2) - \alpha = 2190$$

$$180n - 360 - \alpha = 2190$$

Despejamos n:

$$180n = 2190 + 360 + \alpha$$

$$180n = 2550 + \alpha$$

$$n = \frac{2550 + \alpha}{180}$$

Esta expresión la podemos escribir como: $n = \dfrac{2520 + (30 + \alpha)}{180}$

O bien: $n = \dfrac{2520}{180} + \dfrac{30 + \alpha}{180}$

$$n = 14 + \frac{30 + \alpha}{180}$$

Como n es un número entero, basta con definir para qué valor de α la fracción siguiente, es también un entero:

$$\frac{30 + \alpha}{180}$$

Dado que el polígono es convexo, entonces $0^0 < \alpha < 180^0$ y, por lo tanto, $\alpha = 150^0$ es el único valor para el cual la fracción analizada es entera.

En efecto, para $\alpha = 150$ se tiene que:



$$n = 14 + \frac{30 + 150}{180} = 14 + \frac{180}{180}$$

$$n = 14 + 1 = 15$$

Por lo tanto, 15 es el número de lados del polígono convexo.



www.elsolucionario.net

Problemas a resolver

Resuelve los siguientes ejercicios escribiendo con todo detalle cada paso de tu solución.

1. Un cierto video juego tiene una pantalla rectangular de 12 cm de ancho y 9 cm de alto. Al inicio, una pelotita se encuentra en la esquina de la derecha más baja de la pantalla y sube a la izquierda formando un ángulo de 45^0 con la vertical. Siempre que la pelotita avanza al lado izquierdo de la pantalla reaparece en el lado derecho a la misma altura y, similarmente, cuando avanza a la cima de la pantalla reaparece en el fondo a la misma posición horizontal. ¿Cuánto viajará la pelotita antes de volver a su posición original?

(a) $18\sqrt{2}$ **(b)** 36 **(c)** $36\sqrt{2}$
(d) $36\sqrt{3}$ **(e)** 144

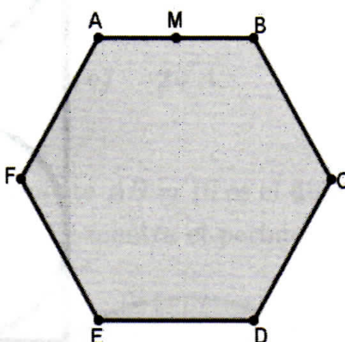
2. ¿Cuál es el área del triángulo formado al unir los puntos medios de un triángulo cuyas medidas de los lados son de 6, 8 y 10 unidades de longitud?

(a) 4 **(b)** 6 **(c)** 8
(d) 12 **(e)** $20\sqrt{2}$

3. Cada lado de un triángulo ABC es de 12 unidades. D es el pie de la perpendicular trazada desde A en BC y E es el punto medio de AD. ¿Cuál es la longitud de BE?

(a) $\sqrt{18}$ **(b)** $\sqrt{28}$ **(c)** 6
(d) $\sqrt{63}$ **(e)** $\sqrt{98}$

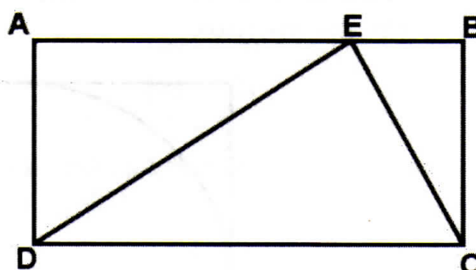
4. Un hexágono regular $ABCDEF$ tiene lados con longitud de $2\,cm$. El punto medio de AB es M. ¿Cuál de los siguientes segmentos posee $\sqrt{13}\,cm$ de longitud?



(a) BD (b) BE (c) EM

(d) FM (e) Ninguna de éstas.

5. En la figura siguiente, $ABCD$ es un rectángulo. AB y CD tienen longitudes enteras; $AE = 4$, $EC = \sqrt{13}$ y el área del triángulo DEC es 9. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?



(a) 6 (b) 9 (c) 14

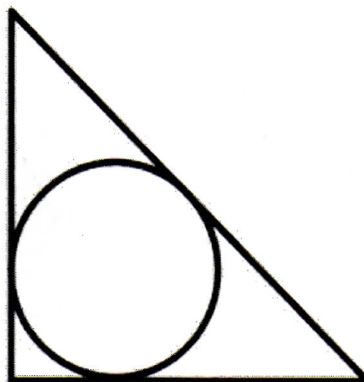
(d) 18 (e) 22

6. AB y AC son dos lados adyacentes de un polígono regular, de tal manera que el ángulo BCA es igual a un tercio del ángulo BAC. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

(a) 3 (b) 4 (c) 5

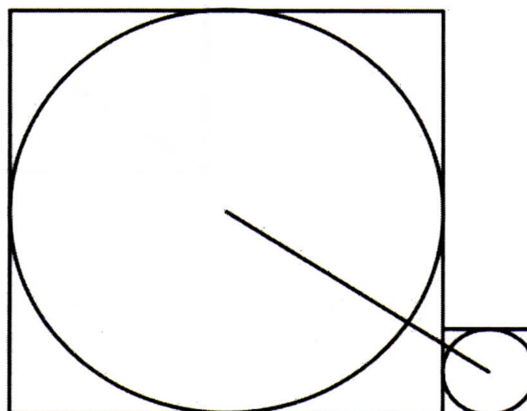
(d) 10 (e) 12

7. El triángulo mostrado a continuación tiene lados de longitud 20, 21 y 29. ¿Cuál es el radio del círculo inscrito al triángulo?



(a) 4 (b) $7-\sqrt{7}$ (c) 5
(d) $5+\sqrt{3}$ (e) 6

8. En la siguiente figura el área del cuadrado grande es 49 veces mayor que la del cuadrado pequeño. Si el área total de ambos cuadrados es de 200 unidades cuadradas, determina la longitud del segmento que une los centros de los dos círculos inscritos.

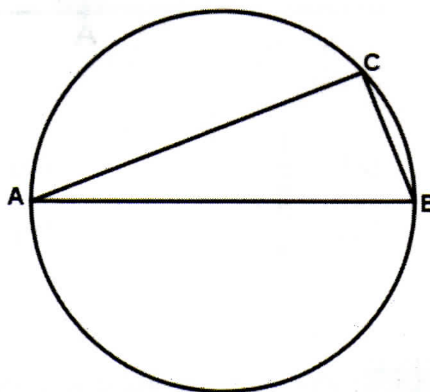


(a) 7 (b) 9 (c) 10
(d) 11 (e) 13

9. En un cuadrado C_1 con área A, es dibujado un círculo inscrito. De la misma forma, un cuadrado C_2 es inscrito en el círculo. ¿Cuál es el área del cuadrado C_2?

(a) $\frac{A}{2}$ (b) $\frac{A}{4}$ (c) $\frac{A}{\sqrt{2}}$
(d) $\sqrt{A}$ (e) $2\sqrt{A}$

10. En el diagrama siguiente $AB = 10$ es el diámetro del círculo y el área del triángulo es de 11 cm^2. Encuentra el perímetro del triángulo ABC.



(a) 19 (b) 20 (c) 21
(d) 22 (e) 23

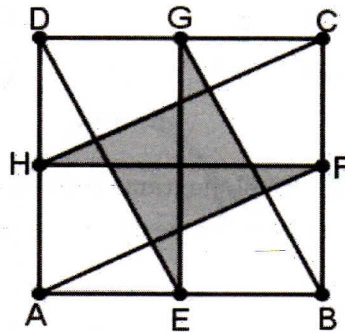
11. $ABCDE$ es un pentágono regular, P es un punto en el interior de $ABCDE$, tal que PED es un triángulo equilátero. ¿Cuál es la medida del ángulo APB?

(a) 72^0 (b) 84^0 (c) 90^0
(d) 96^0 (e) 108^0

12. ¿Cuál es el diámetro del círculo inscrito en el triángulo cuyos lados miden $8, 15$ y 17?

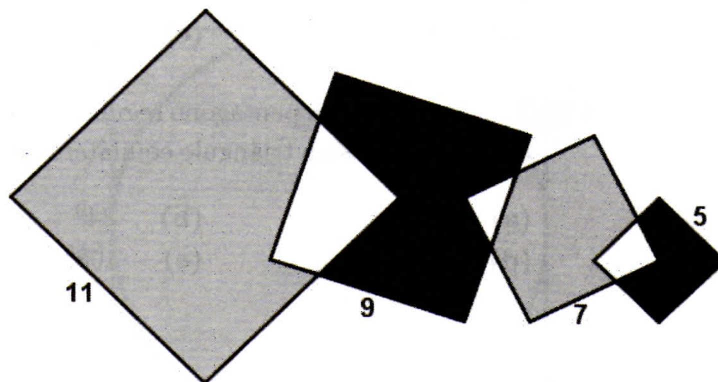
(a) $4\sqrt{2}$ (b) $5\frac{2}{3}$ (e) $\frac{3\sqrt{17}}{2}$
(d) $2\sqrt{10}$ (c) 6

13. En el diagrama siguiente $ABCD$ es un cuadrado y E, F, G y H son los puntos medios de cada uno de sus lados. ¿Qué fracción del área total del cuadrado representa el área sombreada?



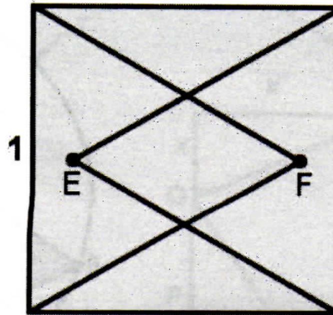
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{3}$
(d) $\frac{3}{8}$ (e) $\frac{2}{5}$

14. El dibujo que abajo se presenta muestra a 4 cuadrados de lados 5, 7, 9 y 11 que se traslapan. ¿Cuál es la diferencia entre el área total en gris y la que está en negro?



(a) 25 (b) 36 (c) 49
(d) 64 (e) 32

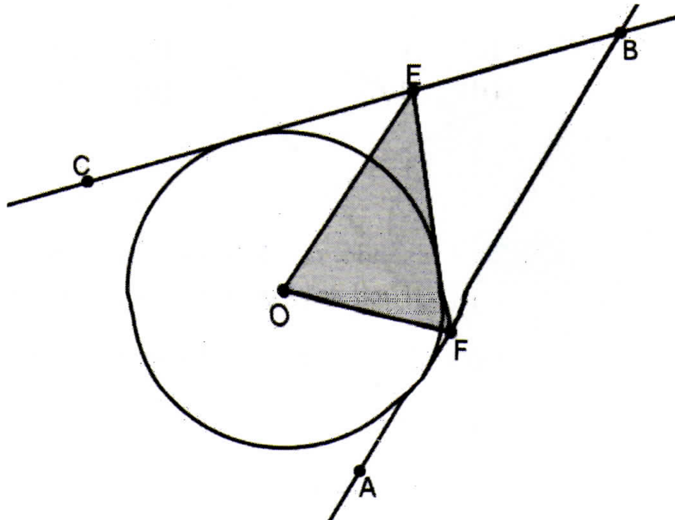
15. En la siguiente figura se muestra un cuadrado de lado 1 y dos triángulos equiláteros. Encuentra la longitud del segmento EF.



(a) $\sqrt{3}-1$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

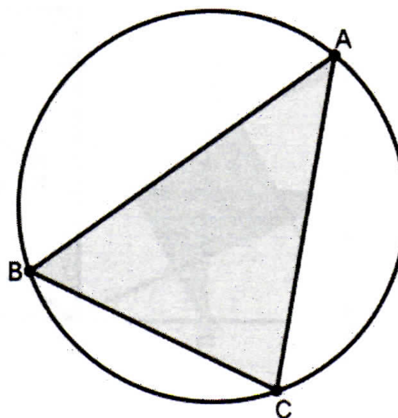
16. En la figura de abajo $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overline{EF}$ son tangentes al círculo con centro en O, de tal manera que $\angle ABC = 48^0$. ¿Cuál es la medida del ángulo EOF?



(a) 42^0 (b) 69^0 (c) 66^0

(d) 48^0 (e) 84^0

17. En el siguiente esquema A, B y C son puntos de la circunferencia con radio 4 cm, tal que $\angle BAC = 45^0$. ¿Cuál es la longitud de la cuerda BC?



(a) 4 cm **(b)** $3\sqrt{3}$ cm **(c)** $4\sqrt{2}$ cm
(d) 5 cm **(e)** 6 cm

18. En el triángulo ABC la mediana de A es perpendicular a la mediana trazada desde B. Si $BC = 7$ y $AC = 6$, ¿cuál es la longitud de AB?

(a) 4 **(b)** $\sqrt{17}$ **(c)** 4.25
(d) $2\sqrt{5}$ **(e)** 4.5

19. Un sólido, con forma de trapecio rectangular, tiene lados con longitud a, b y c. ¿Cuál es el área de la superficie de este sólido?

(a) $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

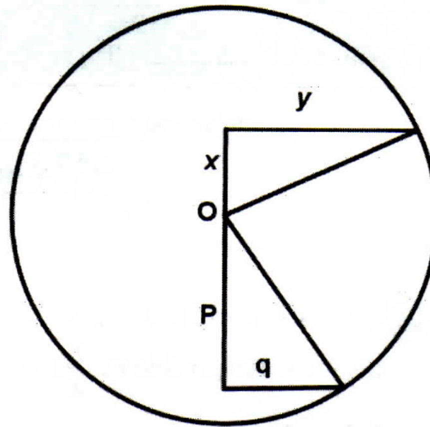
(b) abc

(c) $2(a^2+b^2+c^2)$

(d) $(a+b+c)^2$

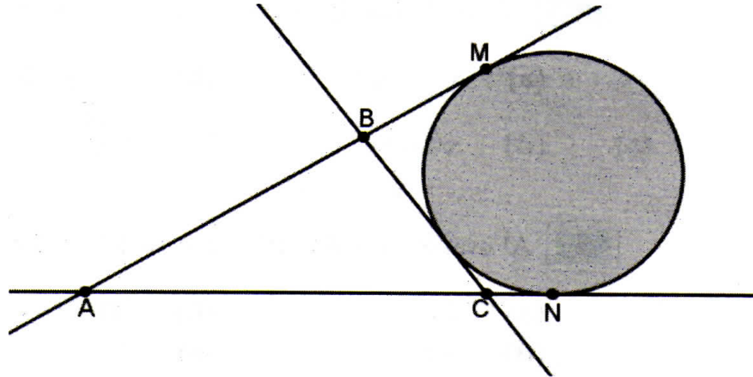
(e) $ab+bc+ca$

20. En la figura siguiente O es el centro de la circunferencia y $x^2+y^2+p^2+q^2 = 72$. Calcula el perímetro de ésta.



(a) 8π (b) 9π (c) 12π
(d) 24π (e) 36π

21. Si en el esquema de abajo, las rectas AN, AM y BC son tangentes al círculo y la longitud de AN es 7, ¿cuál es el perímetro del triángulo ABC?



(a) 12 (b) 13 (c) 14
(d) 15 (e) 16

¿Cómo terminamos?

Nombre: ______________________________

Grupo: __________ Turno: __________ Fecha: __________

Resuelve los siguientes ejercicios y entrega a tu profesor.

Aciertos: __________

1. Si $14 < y < 21$, $9 < x < 13$, donde x, y son números naturales, ¿cuál es el menor valor posible de $\frac{y}{x}$?

(a) 2 (b) $\frac{6}{5}$ (c) $\frac{3}{2}$

(d) $\frac{5}{3}$ (e) $\frac{9}{5}$

2. Si $4a = 8b = 20c = 40$, entonces $\frac{a^2b^3}{c} =$

(a) 6250 (b) 2500 (c) 1250

(d) 625 (e) 125

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es igual a $2\sqrt{6}$?

(a) $\sqrt{6} + \sqrt{6}$ (b) $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ (c) $\sqrt{24}$

(d) $\sqrt{3}\sqrt{8}$ (e) $\frac{\sqrt{96}}{2}$

4 Al evaluar $7 - 3 \times 2[5 - 2 \times 10 \div 2] \div 2 + 5$, se obtiene:

(a) 25 (b) 35 (c) 27

(d) -27 (e) 0

5 Si $a \circledast b = a^b - b^a$ y $a \circledcirc b = (a+b)(a-b)$, ¿cuál es el valor de $3 \circledast (3 \circledcirc 2)$?

(a) 120 (b) 118 (c) 200
(d) 148 (e) 224

6 ¿Cuál de los siguientes números es impar?

(a) $11111^4 + 1$ (b) $131313^4 + 2$ (c) $99999^4 + 3$
(d) $77777^4 + 5$ (e) $55555^4 + 7$

7 La suma de las raíces de la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$, es:

(a) $\frac{7}{2}$ (b) $-\frac{7}{2}$ (c) $-\frac{5}{2}$
(d) -2 (e) $\frac{5}{2}$

8 ¿Cuál es el primer dígito (el de la izquierda) en el menor número entero positivo en el que la suma de todas sus cifras es 2001?

(a) 1 (b) 2 (c) 3
(d) 4 (e) 5

9 Supón que $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ y $y + \frac{1}{x} = 3$. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{y}$?

(a) 0.2 (b) 0.3 (c) 0.4
(d) 0.5 (e) 1.2

10 Si A es el área del triángulo cuyos lados son $5, 5$ y 8; y B denota al área del triángulo cuyos lados son de 5, 5 y 6 unidades. ¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

(a) $A < B < 12$ (b) $B < A < 12$ (c) $A = B$
(d) $12 < A < B$ (e) $12 < B < A$

Evaluación diagnóstica

1. (d)

2. (e)

3. (d)

4. (b)

5. (d)

6. (b)

7. (a)

8. (b)

9. (e)

10. (c)

Respuestas

Unidad 1

1.	(c)	**8.**	(b)
2.	(b)	**9.**	(b)
3.	(c)	**10.**	(b)
4.	(c)	**11.**	(d)
5.	(b)	**12.**	(c)
6.	(c)	**13.**	(a)
7.	(a)	**15.**	(c)

Respuestas

Unidad 2

1.	(c)	**11.**	(c)	**21.**	(a)	**31.**	(e)
2.	(a)	**12.**	(e)	**22.**	(c)	**32.**	(b)
3.	(c)	**13.**	(e)	**23.**	(c)	**33.**	(b)
4.	(e)	**14.**	(a)	**24.**	(c)	**34.**	(e)
5.	(e)	**15.**	(a)	**25.**	(e)	**35.**	(c)
6.	(d)	**16.**	(d)	**26.**	(a)	**36.**	(c)
7.	(c)	**17.**	(e)	**27.**	(e)	**37.**	(a)
8.	(d)	**18.**	(d)	**28.**	(a)	**38.**	(b)
9.	(c)	**19.**	(c)	**29.**	(d)		
10.	(b)	**20.**	(d)	**30.**	(e)		

Respuestas

Unidad 3

1.	(c)
2.	(b)
3.	(d)
4.	(c)
5.	(d)
6.	(c)
7.	(e)
8.	(c)
9.	(a)
10.	(d)
11.	(b)
12.	(c)
13.	(b)
14.	(d)
15.	(a)
16.	(c)
17.	(c)
18.	(b)
19.	(a)
20.	(c)
21.	(c)

FUSIÓN
EDUCATIVA

ÁREA: EDUCACIÓN MEDIA
ISBN 978-607-05-0388-7



Contacto:
info@fusioneducativa.com
Tel. 222 28 49 8 61
01 800 00 1 3338